Buscando Compacidade em um Novo Ambiente

Gabriel Silva Lucidio*

Universidade Federal de São Carlos
gabriel_lucidio@hotmail.com

Abstract

Este artigo se inicia com um resultado clássico na Teoria de Espaços Métricos: o Teorema de Bolzano-Weierstrass. Em seguida, nos adentramos em um "novo ambiente", para estudar convergência de sequências de conjuntos. Apresentamos então alguns exemplos e resultados para ilustrar esse novo conceito. Para finalizar, apresentamos o chamado "Teorema de Zarankiewicz", que une o Teorema de Bolzano-Weierstrass apresentado inicialmente, com esse novo conceito de convergência.

1. Introdução

Em 1817 ([2]), o matemático boêmio Bernard Bolzano (1781-1848) demonstrou um resultado que hoje é conhecido como "Teorema do Valor Intermediário". Já em 1874, o matemático alemão Karl Weierstrass (1815-1897) adaptou o tratamento apresentado por Bolzano e, em algumas notas de suas aulas para um curso de verão, demonstrou que toda sequência limitada de números reais admite uma subsequência convergente. Este resultado ficou então conhecido como "Teorema de Bolzano-Weierstrass". Para mais detalhes históricos, acessar [5].

Com a introdução posterior do conceito de Espaços Métricos, o Teorema de Bolzano-Weierstrass pode ser reenunciado, de modo a garantir que, em um espaço métrico compacto, toda sequência admite subsequência convergente.

Em um outro ambiente, o de análise para sequências de conjuntos, uma noção de convergência pode ser introduzida. Apresentamos então alguns exemplos e resultados para ilustrar esse novo conceito. A partir daí, o Teorema de Bolzano-Weierstrass pode ser adaptado para sequências de conjuntos. Esse resultado foi estabelecido em 1927 ([6]) pelo matemático polonês Casimir Zarankiewicz (1902-1959), e recebe o nome de "Teorema de Zarankiewicz".

Casimir Zarankiewicz *(1902-1959)*

*Este artigo é resultado de um trabalho de Iniciação Científica, realizado sob a orientação da Prof.ª Dr.ª Cláudia Buttarello Gentile Moussa, e financiado pela FAPESP – processo 2016/22146-5.

A noção de convergência para sequências de conjuntos e sua aplicação com o Teorema de Zarankiewicz são as motivações para esse trabalho, o qual exige do leitor um curso introdutório de Espaços Métricos e/ou Topológicos.

2. O Teorema de Bolzano-Weierstrass

Inicialmente vamos apresentar o Teorema de Bolzano-Weierstrass no contexto de Espaços Métricos, com base em [4]. Recordamos que um subconjunto de um espaço métrico é *fechado* se contiver todos os seus pontos de acumulação.

Proposição 1. Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Então todo subconjunto infinito de X possui um ponto de acumulação.

Prova. Suponhamos que exista um subconjunto infinito $A \subset X$ que não tenha ponto de acumulação. Então A contém todos os seus pontos de acumulação, o que implica A fechado. Então, para cada $a \in A$, podemos escolher uma vizinhança aberta U_a de a tal que U_a intersecta A apenas no ponto a. O espaço X é então coberto pelo aberto $X \setminus A$ reunido com os abertos U_a. Sendo X compacto, pode ser coberto por uma subfamília finita destes conjuntos. Como $X \setminus A$ não intersecta A e cada U_a intersecta A em apenas um ponto, segue que A é finito. □

Teorema 1. *(Teorema de Bolzano-Weierstrass)* Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Então toda sequência em X possui subsequência convergente.

Prova. Dada uma sequência (x_n) em X, considere o conjunto $A := \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Se A é finito, então existe um ponto $x \in X$ tal que $x = x_n$ para infinitos valores de $n \in \mathbb{N}$. Neste caso, a sequência (x_n) possui uma subsequência constante e, portanto, convergente. Por outro lado, se A é infinito, então pela Proposição 1, A possui um ponto de acumulação x. Vamos então construir, indutivamente, uma subsequência de (x_n) convergindo para x.
Inicialmente, escolha $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \in B(x, 1)$. Suponha então que o natural n_{j-1} esteja dado. Como a bola $B(x, 1/j)$ intersecta A em infinitos pontos, podemos escolher $n_j > n_{j-1}$ de modo que $x_{n_j} \in B(x, 1/j)$. A subsequência (x_{n_j}) assim construída converge, pois, para o ponto x. □

3. Convergência para sequências de conjuntos

Vamos agora introduzir uma noção de convergência para sequências de conjuntos. Há distintas maneiras de introduzir esse novo conceito de convergência e, neste trabalho, apresentaremos a conhecida "Convergência de Painlevé-Kuratowski". Como motivação para apresentar essa noção de convergência, apresentamos alguns exemplos e resultados, além de demonstrar, na seção posterior, o Teorema de Zarankiewicz. Isso é feito com base em [1].

Como queremos trabalhar com sequências de conjuntos, inicialmente precisamos abordar uma maneira de "medir distâncias" entre pontos e conjuntos. As aspas foram utilizadas pelo fato de que a definição apresentada a seguir não é de uma métrica, mas é suficiente para o estudo aqui proposto.

Definição 1. *(Distância entre ponto e conjunto)* Sejam (X, d) um espaço métrico e A um subconjunto não vazio de X. Definimos a *distância de um ponto $x \in X$ ao conjunto A* como sendo o valor:

$$d_p(x, A) := \inf\{d(x, a); a \in A\}.$$

Proposição 2. Seja (X, d) um espaço métrico. Dados $x \in X$ e $A \subset X$ um subconjunto não vazio, vale:

$$d_p(x, A) \leq d(x, y) + d_p(y, A), \quad \forall\, y \in X.$$

Prova. Segue diretamente da definição que $d_p(x, A) \leq d(x, a)$ para todo $a \in A$. Com isso, pela desigualdade triangular em X e propriedade de ínfimo, dado $y \in X$, temos:

$$\begin{aligned} d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) \quad &\Rightarrow \quad \inf\{d(x,a);\, a \in A\} \leq \inf\{d(x,y) + d(y,a);\, a \in A\} \\ &\Rightarrow \quad d_p(x, A) \leq d(x,y) + d_p(y, A). \end{aligned}$$

□

A partir da noção de distância entre ponto e conjunto, surge naturalmente uma extensão do conceito de "bolas", para o que chamamos de "bola ao redor de um conjunto".

Definição 2. *(Bola ao redor de um conjunto)* Sejam (X, d) um espaço métrico e K um subconjunto não vazio de X. A *bola de raio $r > 0$ ao redor de K* é o conjunto:

$$B[K, r] := \{x \in X;\, d_p(x, K) \leq r\}.$$

Dois conceitos fundamentais ao tratarmos de convergência são os de limites superior e inferior. A convergência entre conjuntos é baseada nesses conceitos. Entretanto, vamos antes apresentar essa definição para sequências reais.

Definição 3. *(Limites superior e inferior de sequências reais)* Sejam (x_n) uma sequência de números reais e $A := \{x \in \mathbb{R};\, \exists\, (x_{n_j}) \subset (x_n) \text{ com } x_{n_j} \to x\}$[1]. Tal conjunto A possui todos os limites das subsequências de (x_n), além de, eventualmente, ∞ e $-\infty$. Dessa forma, definimos os *limites superior e inferior* da sequência (x_n) como sendo, respectivamente:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} x_n \quad &:= \quad \sup A; \\ \liminf_{n\to\infty} x_n \quad &:= \quad \inf A. \end{aligned}$$

Teorema 2. Uma sequência (x_n) de números reais converge para $x \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $\limsup_{n\to\infty} x_n = x = \liminf_{n\to\infty} x_n$.

Prova. Se existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \to x$, então toda subsequência de (x_n) também converge para x. Segue então, da definição, que $\limsup_{n\to\infty} x_n = x = \liminf_{n\to\infty} x_n$.

Reciprocamente, se $\limsup_{n\to\infty} x_n = x = \liminf_{n\to\infty} x_n$, então o conjunto A da definição precedente é um conjunto unitário $A = \{x\}$ e, portanto, $x_n \to x$. □

Agora estamos aptos a definir uma noção de convergência para sequências de conjuntos. Isso é feito a partir dos conceitos de limites superior e inferior. Em seguida, alguns exemplos e resultados serão apresentados, com o intuito de ilustrar de forma mais clara este novo conceito, que é um tanto quanto incomum.

Definição 4. *(Limite de uma sequência de conjuntos)*[2] Sejam (X, d) um espaço métrico e (K_n) uma sequência de subconjuntos de X. Definimos os *limites superior e inferior* da sequência (K_n) como sendo, respectivamente:

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} K_n \quad &:= \quad \left\{x \in X;\, \liminf_{n\to\infty} d_p(x, K_n) = 0\right\}; \\ \liminf_{n\to\infty} K_n \quad &:= \quad \left\{x \in X;\, \lim_{n\to\infty} d_p(x, K_n) = 0\right\}. \end{aligned}$$

[1] A notação $(x_{n_j}) \subset (x_n)$ significa que (x_{n_j}) é uma subsequência de (x_n).

[2] Convergência de Painlevé-Kuratowski

Dizemos que o subconjunto $K \subset X$ é o *limite* (ou *conjunto limite*) da sequência (K_n) se

$$\limsup_{n\to\infty} K_n = K = \liminf_{n\to\infty} K_n.$$

Neste caso, utilizaremos a notação $\lim_{n\to\infty} K_n := K$ ou, simplesmente, $K_n \to K$.

Observação 1. Como $d_p(x, K_n)$ é, por definição, um número real, então a Definição 3 é suficiente para que o limite superior acima esteja bem definido.

Observação 2. Se a sequência (K_n) for restrita a uma sequência de conjuntos unitários, a definição de limite inferior acima coincide com a clássica noção de convergência para sequências de elementos em X.

Observação 3. Como $d_p(x, K_n) = d_p(x, \overline{K_n})$ para todo $x \in X$, então $\liminf_{n\to\infty} K_n = \liminf_{n\to\infty} \overline{K_n}$. Além disso, $\liminf_{n\to\infty} K_n \subset \limsup_{n\to\infty} K_n$ (pelo Teorema 2).

Exemplo 1. Considere o espaço métrico $(\mathbb{R}^3, d)$, sendo d a métrica euclidiana. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $K_n := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq n^2\}$ (Figura 1). Encontraremos os conjuntos $\limsup_{n\to\infty} K_n$, $\liminf_{n\to\infty} K_n$ e, caso exista, $\lim_{n\to\infty} K_n$.

Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, podemos tomar n como sendo o menor natural maior do que $a := \sqrt{3}\max\{|x|, |y|, |z|\}$ e então teremos $(x, y, z) \in K_n$. Dessa forma, podemos ver que $\lim_{n\to\infty} K_n = \mathbb{R}^3$.

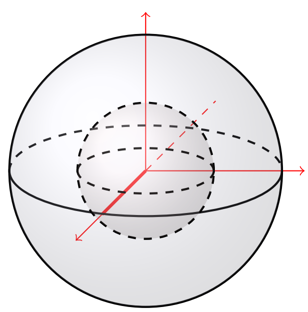

Figure 1: *Representação da sequência (K_n) do Exemplo 1.*

Exemplo 2. Considere o espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d)$, sendo d a métrica euclidiana. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina:

$$K_n := \begin{cases} \left\{\dfrac{1}{n}\right\} \times [0, 1], & \text{se } n \text{ par,} \\ \left\{\dfrac{1}{n}\right\} \times [-1, 0], & \text{se } n \text{ ímpar} \end{cases}$$

Encontraremos os conjuntos $\limsup_{n\to\infty} K_n$, $\liminf_{n\to\infty} K_n$ e, caso exista, $\lim_{n\to\infty} K_n$ (Figura 2). Vamos primeiramente calcular $d_p(a, K_n)$, para cada $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
Para n par, temos:

- se $0 \leq y \leq 1$, então $d_p(a, K_n) = |x - \frac{1}{n}|$;
- se $y > 1$, então $d_p(a, K_n) = \sqrt{(x - \frac{1}{n})^2 + (y - 1)^2}$;
- se $y < 0$, então $d_p(a, K_n) = \sqrt{(x - \frac{1}{n})^2 + y^2}$.

Para n ímpar, temos:

- se $0 \geq y \geq -1$, então $d_p(a, K_n) = |x - \frac{1}{n}|$;
- se $y < -1$, então $d_p(a, K_n) = \sqrt{(x - \frac{1}{n})^2 + (y+1)^2}$;
- se $y > 0$, então $d_p(a, K_n) = \sqrt{(x - \frac{1}{n})^2 + y^2}$.

Assim, $d_p(a, K_n) \to 0$ somente se $(x, y) = (0, 0)$. Logo, $\liminf_{n\to\infty} K_n = \{(0,0)\}$.

Além disso, $\liminf_{n\to\infty} d_p(a, K_n) = 0$ somente se $x = 0$ e $y \in [-1, 1]$. Logo, $\limsup_{n\to\infty} K_n = \{0\} \times [-1, 1]$.

Podemos então observar um exemplo em que os limites superior e inferior são distintos e, consequentemente, o limite da sequência não existe.

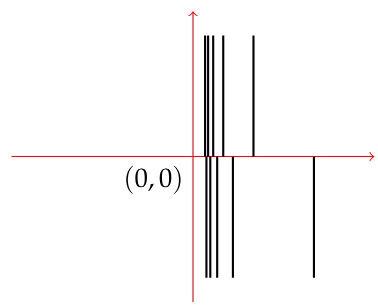

Figure 2: *Representação da sequência (K_n) do Exemplo 2.*

Proposição 3. Sejam (X, d) um espaço métrico e (K_n) uma sequência de subconjuntos de X. Então $\liminf_{n\to\infty} K_n$ e $\limsup_{n\to\infty} K_n$ são subconjuntos fechados de X.

Prova. Vamos provar cada item separadamente.

- Seja $x \in X$ um ponto de acumulação de $\limsup_{n\to\infty} K_n$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $y \in \limsup_{n\to\infty} K_n$ tal que $d(x, y) < \varepsilon/2$. Como $y \in \limsup_{n\to\infty} K_n$, existe uma subsequência (K_{n_j}) de (K_n) de modo que $d_p(y, K_{n_j}) \to 0$, ou seja, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $j \geq J$, $d_p(y, K_{n_j}) < \varepsilon/2$. Segue então da Proposição 2 que $d_p(x, K_{n_j}) \leq d(x, y) + d_p(y, K_{n_j}) < \varepsilon$ para $j \geq J$.
  Logo, $d_p(x, K_{n_j}) \to 0$ e, portanto, $x \in \limsup_{n\to\infty} K_n$.
- Seja $x \in X$ um ponto de acumulação de $\liminf_{n\to\infty} K_n$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $y \in \liminf_{n\to\infty} K_n$ tal que $d(x, y) < \varepsilon/2$. Como $y \in \liminf_{n\to\infty} K_n$, então $d_p(y, K_n) \to 0$, ou seja, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$, $d_p(y, K_n) < \varepsilon/2$. Segue então da Proposição 2 que $d_p(x, K_n) \leq d(x, y) + d_p(y, K_n) < \varepsilon$ para $n \geq N$.
  Logo, $d_p(x, K_n) \to 0$ e, portanto, $x \in \liminf_{n\to\infty} K_n$.

$\square$

Teorema 3. Sejam (X, d) um espaço métrico e (K_n) uma sequência de subconjuntos de X. Valem então as seguintes afirmações:

- $\liminf\limits_{n\to\infty} K_n$ é o conjunto de limites de sequências $(x_n) \in (K_n)$[3];

[3] A notação $(x_n) \in (K_n)$ significa que (x_n) é uma sequência de elementos, de modo que $x_n \in K_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

- $\limsup_{n\to\infty} K_n$ é o conjunto de pontos de acumulação de sequências $(x_n) \in (K_n)$, i.e., de limites de subsequências $(x_{n_j}) \in (K_{n_j})$.

Prova.

- Como $\liminf_{n\to\infty} K_n$ é um subconjunto fechado, temos:

$$x \in \liminf_{n\to\infty} K_n \Leftrightarrow d_p(x, K_n) \to 0 \Leftrightarrow \exists\,(x_n) \in (K_n) \text{ tal que } d(x, x_n) \to 0.$$

- Como $\limsup_{n\to\infty} K_n$ é um subconjunto fechado, temos:

$$x \in \limsup_{n\to\infty} K_n \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} d_p(x, K_n) = 0 \Leftrightarrow \exists\,(x_n) \in (K_n) \text{ tal que } x_{n_j} \to x,$$

$$\text{para alguma subsequência } (x_{n_j}) \subset (x_n).$$

□

4. O Teorema de Zarankiewicz

Estabelecido o conceito de convergência para sequências de conjuntos, buscamos agora obter uma "nova versão" do Teorema de Bolzano-Weierstrass, com base nesse contexto. Essa nova versão é conhecida como Teorema de Zarankiewicz, o qual será apresentado ao final desta seção, seguindo [1]. Primeiramente, precisamos estabelecer uma caracterização de espaços métricos separáveis, de acordo com [3] e, em seguida, apresentar um último resultado auxiliar.

Definição 5. *(Base para uma topologia)* Seja (X, τ) um espaço topológico. Uma *base de abertos* (ou simplesmente uma *base*) para a topologia τ é uma coleção Ω de elementos de τ, chamados *abertos básicos*, satisfazendo a seguinte propriedade:
"Para cada aberto $A \subset X$ e cada ponto $x \in A$ existe um conjunto $B_x \in \Omega$ tal que $x \in B_x \subset A$."

Definição 6. *(Espaço separável)* Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é separável se X possuir um subconjunto enumerável denso.

Proposição 4. Um espaço métrico (X, d) é separável se, e somente se, possuir uma base enumerável.

Prova. Inicialmente, suponhamos que X possua uma base enumerável $\Omega = \{B_n;\, n \in \mathbb{N}\}$. Podemos escolher, para cada $n \in \mathbb{N}$, um ponto $x_n \in B_n$. Assim, o conjunto enumerável $E := \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ obtido dessa maneira é denso em X. De fato, se A é um aberto não vazio em X, dado $x \in A$, por Ω ser uma base existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in B_n \subset A$, donde $x_n \in A$, o que prova a afirmação.

Reciprocamente, se X é separável, seja $F := \{x_1, \dots, x_m, \dots\}$ um subconjunto enumerável denso em X. Considere a coleção de bolas abertas $\Omega := \{B_{m_n} := B(x_m, 1/n);\, m, n \in \mathbb{N}\}$. Certamente Ω é uma coleção enumerável de abertos em X. Além disso, dados um aberto $A \subset X$ e um ponto $x \in A$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Existem ainda um natural n tal que $1/n < \varepsilon/2$ e um ponto $x_m \in F$ tal que $d(x, x_m) < 1/n$ (pois F é denso em X). Esta desigualdade mostra que $x \in B_{m_n}$.

Por outro lado, se $y \in B_{m_n}$, então $d(y, x_m) < 1/n$ e assim $d(y, x) \leq d(y, x_m) + d(x_m, x) < 1/n + 1/n < \varepsilon$. Logo, $B_{m_n} \subset B(x, \varepsilon)$. Destarte, $x \in B_{m_n} \subset A$ e, portanto, Ω é uma base enumerável de X. □

Proposição 5. Sejam (X,d) um espaço métrico e (K_n) uma sequência de subconjuntos de X. Então:

$$\liminf_{n\to\infty} K_n = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} B[K_n,\varepsilon].$$

Prova.

$$\begin{aligned} x \in \liminf_{n\to\infty} K_n \Leftrightarrow d_p(x,K_n) \to 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall\, n \geq N,\, d_p(x,K_n) \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad x \in \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcup_{N\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq N} B[K_n,\varepsilon]. \end{aligned}$$

□

A seguir apresentamos o resultado principal deste artigo: o Teorema de Zarankiewicz. Apesar de sua demonstração ser bem técnica, a ideia central é utilizar os abertos básicos para construir uma sequência de subsequências decrescente, e então extrair uma subsequência convergente.

Teorema 4. *(Teorema de Zarankiewicz)* Seja (X,d) um espaço métrico separável. Se (K_n) é uma sequência de subconjuntos de X, então ela contém uma subsequência que possui limite (possivelmente vazio).

Prova. Primeiramente, como X é separável, segue da Proposição 4 que X possui uma base enumerável $\Omega := \{U_m \subset X;\, m \in \mathbb{N}\}$ satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\text{para todo subconjunto aberto } U \text{ e para todo } x \in U, \text{ existe } U_m \in \Omega \text{ tal que } x \in U_m \subset U. \tag{1}$$

Considere (K_n) uma sequência de subconjuntos de X. Vamos construir, indutivamente, uma sequência de subsequências[4] $\left(K_n^{(m)}\right)$:

1) para $m = 1$, definimos $K_n^{(1)} := K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

   Suponha que estejam construídas as $m-1$ primeiras subsequências $\left(K_n^{(p)}\right)$, $1 \leq p \leq m-1$. Considere então o m-ésimo subconjunto aberto $U_m \in \Omega$ e continuemos a construção;

2) se, para toda subsequência (n_j), tivermos

$$U_m \cap \left(\limsup_{j\to\infty} K_{n_j}^{(m-1)}\right) \neq \emptyset,$$

   defina $K_j^{(m)} := K_j^{(m-1)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$;

3) se existir alguma subsequência (n_j) satisfazendo

$$U_m \cap \left(\limsup_{j\to\infty} K_{n_j}^{(m-1)}\right) = \emptyset, \tag{2}$$

   defina $K_j^{(m)} := K_{n_j}^{(m-1)}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. (A subsequência (n_j) que satisfaz (2) pode ser escolhida arbitrariamente.)

[4]Para cada $m \in \mathbb{N}$ fixado, $K_n^{(m)}$ é uma subsequência de (K_n).

Tendo as sequências $\left(K_n^{(m)}\right)$ construídas, devemos fazer a seguinte observação:

$\Diamond$ $\left(K_n^{(m)}\right)$ é uma sequência decrescente, i.e., $\left\{K_n^{(m)}\right\} \subset \left\{K_n^{(k)}\right\}$ para $k \leq m$.

De fato, para $m = 1$, segue da definição que $\left\{K_n^{(1)}\right\} = \{K_n\}$;
Para $m = 2$, analisemos os dois possíveis casos:

- se $U_2 \cap \left(\limsup\limits_{j\to\infty} K_{n_j}^{(1)}\right) \neq \emptyset$ para toda subsequência (n_j), então $\left\{K_n^{(2)}\right\} = \left\{K_n^{(1)}\right\} = \{K_n\}$;
- se $U_2 \cap \left(\limsup\limits_{j\to\infty} K_{n_j}^{(1)}\right) = \emptyset$ para alguma subsequência (n_j), então $\left\{K_j^{(2)}\right\} = \left\{K_{n_j}^{(1)}\right\} \subset \left\{K_j^{(1)}\right\}$.

Suponhamos que o resultado seja válido até $m-1$. Assim,

- se $U_m \cap \left(\limsup\limits_{j\to\infty} K_{n_j}^{(m-1)}\right) \neq \emptyset$ para toda subsequência (n_j), então $\left\{K_j^{(m)}\right\} = \left\{K_j^{(m-1)}\right\} \subset \left\{K_j^{(m-2)}\right\} \subset \cdots \subset \left\{K_j^{(1)}\right\}$;
- se $U_m \cap \left(\limsup\limits_{j\to\infty} K_{n_j}^{(m-1)}\right) = \emptyset$ para alguma subsequência n_j, então $\left\{K_j^{(m)}\right\} = \left\{K_{n_j}^{(m-1)}\right\} \subset \left\{K_j^{(m-1)}\right\} \subset \left\{K_j^{(m-2)}\right\} \subset \cdots \subset \left\{K_j^{(1)}\right\}$.

Após esta observação inicial, vamos extrair, a partir de $\left(K_n^{(m)}\right)$, a *subsequência diagonal*[5] $D_n := K_n^{(n)}$. Provaremos que tal subsequência possui limite.

Suponhamos que (D_n) não possua limite, i.e., $\limsup_{n\to\infty} D_n \neq \liminf_{n\to\infty} D_n$. Assim, existe $a \in X$ tal que $a \in \limsup_{n\to\infty} D_n$ e $a \notin \liminf_{n\to\infty} D_n$. Existe então, pela Proposição 5, uma vizinhança U de a tal que, para todo $j \in \mathbb{N}$, existe $n_j \geq j$ de forma que $D_{n_j} \cap U = \emptyset$.

A partir de (1), existe $U_m \in \Omega$ tal que $a \in U_m \subset U$. Logo:

$$U_m \cap \left(\limsup_{j\to\infty} D_{n_j}\right) = \emptyset \tag{3}$$

De fato, caso a intersecção fosse não vazia, existiria $b \in U_m \cap \left(\limsup_{j\to\infty} D_{n_j}\right)$. Como $b \in \limsup_{j\to\infty} D_{n_j}$, pelo Teorema 3 existiria uma subsequência $\left(D_{n_{j_k}}\right)$ de $\left(D_{n_j}\right)$ contendo uma sequência $\left(x_{n_{j_k}}\right)$ satisfazendo $d(b, x_{n_{j_k}}) \to 0$. Logo, como $b \in U_m$, então $x_{n_{j_k}} \in U_m$ para k suficientemente grande. Isto seria uma contradição, pois $U_m \subset U$ e $U \cap D_{n_j} = \emptyset$, ou seja, $U_m \cap D_{n_j} = \emptyset$.

A partir de (3) e da observação $\Diamond$, sabemos que, se $n_j \geq m$, $D_{n_j} := K_{n_j}^{(n_j)} = K_{p_j}^{(m-1)}$, para algum p_j. Podemos então ver que $\left(D_{n_j}\right)$ é uma subsequência da sequência $\left(K_n^{(m-1)}\right)$.

[5]O argumento utilizado é semelhante ao da diagonalização de Cantor para o caso de sequências numéricas.

Além disso, por (3) e pela construção de $\left(K_n^{(m)}\right)$, temos que $K_j^{(m)} = K_{p_j}^{(m-1)}$. Então:

$$U_m \cap \left(\limsup_{j\to\infty} K_j^{(m)}\right) = U_m \cap \left(\limsup_{j\to\infty} K_{p_j}^{(m-1)}\right) = \emptyset.$$

Como $D_n := K_n^{(n)} = K_{p_n}^{(m)}$ para algum p_n, podemos concluir que (D_n) é uma subsequência da sequência $\left(K_j^{(m)}\right)$. Portanto:

$$a \in \limsup_{n\to\infty} D_n \subset \limsup_{j\to\infty} K_j^{(m)} \subset X \setminus U_m.$$

Isso, por sua vez, contradiz o fato de que $a \in U_m$. □

5. Relação entre os resultados

Por fim, vamos tentar buscar alguma relação entre o Teorema de Bolzano-Weierstrass e o Teorema de Zarankiewicz. Com esse intuito, devemos primeiramente entender como as hipóteses de cada resultado se relacionam.

Proposição 6. Todo espaço métrico compacto é separável.

Prova. Seja (X, d) um espaço métrico compacto. Devemos então provar que X possui um subconjunto enumerável denso. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a família $\{B(x, 1/n);\ x \in X\}$ cobre X. Sendo este compacto, há uma subcobertura finita $F_n := \{B(x_1, 1/n), \ldots, B(x_{k(n)}, 1/n)\}$. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto $G_n := \{x_1, \ldots, x_{k(n)}\}$. Então $G := \cup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ é contável e denso em X. De fato, dado $x \in X$ e $r > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < r$. Como F_n cobre X, então existe $x_{j(n)} \in G_n$ de modo que $x \in B(x_{j(n)}, 1/n)$. Logo, $d(x, x_{j(n)}) < 1/n < r$, i.e., $x_{j(n)} \in B(x, r)$. □

Tendo em vista a relação entre as hipóteses de ambos os resultados dada pela proposição precedente, uma dúvida natural surge: o Teorema de Bolzano-Weierstrass segue como corolário do Teorema de Zarankiewicz, restringindo-o a sequências de subconjuntos unitários?

Vamos então, em um espaço compacto (X, d), nos restringir a sequências de subconjuntos unitários, i.e., para cada $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \{x_n\}$. Pela proposição precedente, (X, d) é separável e, neste caso, o Teorema de Zarankiewicz estabelece a existência do limite de uma subsequência (K_{n_j}). Temos então duas possibilidades:

- $\lim_{j\to\infty} K_{n_j} \neq \emptyset$. Neste caso, em particular, $\liminf_{j\to\infty} K_{n_j} \neq \emptyset$, ou seja, a subsequência (x_{n_j}) converge para algum ponto $x \in X$, de modo que $\lim_{j\to\infty} K_{n_j} = \{x\}$.
- $\lim_{j\to\infty} K_{n_j} = \emptyset$. Neste caso, em particular, $\limsup_{j\to\infty} K_{n_j} = \emptyset$, ou seja, a subsequência (x_{n_j}) não possui subsequência convergente.

O segundo caso, entretanto, implica que, em particular, o conjunto $\{x_{n_j};\ j \in \mathbb{N}\}$ é infinito. Como o espaço é compacto, segue da Proposição 1 a existência de um ponto de acumulação da subsequência (x_{n_j}). Este ponto, pelo Teorema 3, pertence ao conjunto $\limsup_{j\to\infty} K_{n_j}$, o que é uma contradição com o fato de este ser vazio. Consequentemente, o segundo caso é falso e, portanto, $\lim_{j\to\infty} K_{n_j} \neq \emptyset$, i.e., a subsequência (x_{n_j}) é convergente.

Destarte, a resposta para a pergunta inicial é "sim". Ou seja, o Teorema de Bolzano-Weierstrass segue como corolário do Teorema de Zarankiewicz, quando restrito a sequências de subconjuntos unitários.

References

[1] AUBIN, Jean-Pierre; FRANKOWSKA, Hélène. **Set-Valued Analysis.** 1. ed. Boston: Birkhauser, 2009. v. 2, 461 p. (Systems & Control: Foundations & Applications).

[2] BOLZANO, Bernard. **Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege.** Praga, 1817.

[3] LIMA, Elon Lages. **Elementos de Topologia Geral.** Rio de Janeiro: SBM, 2009. 297 p. (Textos Universitários).

[4] MUNKRES, James Raymond. **Topology.** 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000. 537 p.

[5] OUDOT, Xavier. **Le Théorème de Bolzano-Weierstrass.** Culture Math, 2017. Disponível em: `<https://culturemath.ens.fr/sites/default/files/Le%20theoreme%20de%20Bolzano%20Weierstrass.pdf>`. Acesso em: nov. 2018.

[6] ZARANKIEWICZ, Casimir. Sur les points de division dans les ensembles connexes. Fundamenta Mathematicae, 9, p. 124-171, 1927.