Quando a saída para um problema de Combinatória é pela Topologia

Leandro Vicente Mauri

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo
leandro.mauri@usp.br

Resumo

Neste artigo mostraremos um problema de combinatória que surpreendentemente possui uma resolução que utiliza Topologia. Mais do que isso, para este problema não se conhece outra solução que não passe pela Topologia.

1. Introdução

Antes de mais nada, apresentaremos o seguinte problema:

O governador de um certo estado com 10 cidades fez uma reunião com as empresas de ônibus para negociar todas as linhas interurbanas entre essas cidades. Depois de muita negociação, as empresas concordaram em fazer duas exigências ao governador:

• exclusividade em cada linha interurbana atribuída a uma empresa, isto é, não podemos ter duas empresas diferentes operando a mesma linha interurbana;

• quaisquer duas linhas interurbanas atribuídas a uma mesma empresa devem ter uma cidade em comum, por questões de logística. Isto é, não podem ser atribuídas a uma mesma empresa duas linhas $C_1 \iff C_2$ e $C_3 \iff C_4$, onde C_1, C_2, C_3 e C_4 são cidades distintas.

Para economizar com fiscalização, o governador pretende contratar o menor número possível de empresas para fazer todas as linhas. Quantas empresas, no mínimo, ele precisará contratar de modo que sejam satisfeitas as duas condições?

O problema acima é puramente combinatório, mas a solução que apresentaremos será incrivelmente topológica. Demonstraremos o Teorema de Lovász-Kneser, um resultado em Teoria dos Grafos, no qual utilizamos o famoso Teorema de Borsuk-Ulam em sua demonstração. Finalmente, remodelaremos o problema do governador em linguagem de Teoria dos Grafos e obteremos uma resposta.

2. Definições em Teoria dos Grafos

Nesta seção apresentaremos as definições básicas em Teoria dos Grafos que usaremos neste artigo. Apesar de algumas definições formais serem carregadas de notação, a ideia intuitiva por trás delas é bem simples.

A primeira definição é a de grafo. Provavelmente o leitor já ouviu falar sobre grafos, mas, caso seja um conceito totalmente novo, basta imaginar um grafo como um conjunto de pontos (estes serão os chamados vértices do grafo) e tais pontos podem estar conectados ou não, um segmento conectando dois pontos (vértices) é chamado de aresta. Abaixo temos a definição formal.

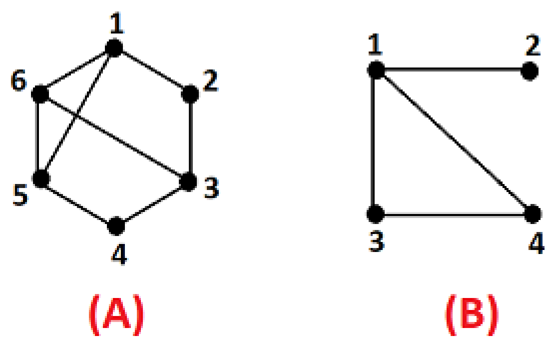
Definição 2.1 *Um **grafo** $G = (V, E)$ é um par, onde V são os vértices do grafo e $E \subset \binom{V}{2}$ (subconjuntos de V com 2 elementos) são as arestas de G.*

Notação: Para cada $n \geq 0$, denotamos $[n] = \{1, ..., n\}$ o conjunto dos n primeiros números naturais.

Ilustramos a definição acima com o seguinte exemplo:

Exemplo 2.2 *Na figura abaixo temos $G = ([6], \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\}, \{5,6\}, \{1,6\}, \{1,5\}, \{3,6\}\})$ para **(A)** e $G = ([4], \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{1,4\}\})$ para **(B)**.*

***Figura 1.** Exemplos de grafos.*



A próxima definição é sobre como colorir o grafo, ou, mais precisamente como podemos "pintar" cada vértice com uma cor de forma que os dois vértices de uma mesma aresta sejam pintados de cores distintas. Na definição formal, as cores são substituídas por números naturais, assim, uma n-coloração é uma coloração do grafo com n cores.

Definição 2.3 (n-coloração de um grafo) *Uma **n-coloração de um grafo** $G = (V, E)$ é uma função*

$$\chi : V \to [n]$$

tal que dados $v_0, v_1 \in V$, com $v_0 \neq v_1$, temos $\chi(v_0) \neq \chi(v_1)$.

É importante notar que todo grafo pode ser colorido: basta atribuir cores distintas para vértices distintos, e daí toda aresta terá dois vértices com cores distintas. O menor número de cores que podemos usar para colorir um grafo G é chamado de número cromático de G.

Definição 2.4 (Número cromático de um grafo) *Seja $G = (V, E)$ um grafo. O menor inteiro natural n tal que existe uma n-coloração para G é chamado de **número cromático de** G e é denotado por $\chi(G)$. Em outras palavras:*

$$\chi(G) = min\{n \in \mathbb{N} \; ; \; \textit{existe uma } n\textit{-coloração do grafo } G\}.$$

O Teorema de Lovász-Kneser, resultado principal deste artigo, nos fornece o valor do número cromático do Grafo de Kneser $KG_{n,k}$, que é exatamente $n - 2k + 2$. O grafo de Kneser $KG_{n,k}$ é o grafo cujos vértices são os subconjuntos $F \subset [n]$ com exatamente k-elementos e, existe uma aresta conectando dois vértices F, F' se, e somente se, a interssecção $F \cap F'$ é vazia.

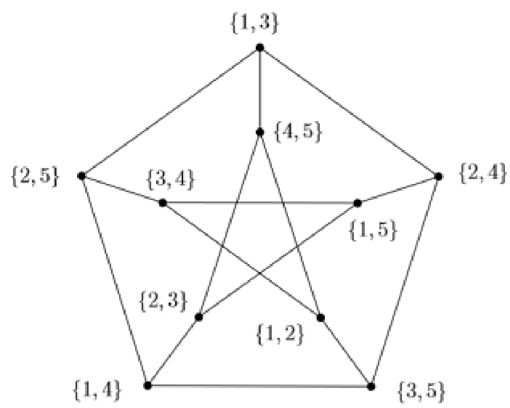
Notação: Seja S um conjunto não-vazio com pelo menos k elementos (onde $k \geq 0$ é natural). Denotamos $\binom{S}{k}$ o conjunto que consiste de todos os subconjuntos $A \subset S$ tal que A possui exatamente k elementos.

Definição 2.5 (Grafo de Kneser $KG_{n,k}$) *O **Grafo de Kneser** $KG_{n,k}$ é o grafo onde os vértices são os subconjuntos de $[n]$ com exatamente k-elementos, e tal que dois vértices F, F' formam uma aresta $\{F, F'\}$ de $KG_{n,k}$ se, e somente se $F \cap F' = \emptyset$. Em outras palavras,*

$$KG_{n,k} = \left(\binom{[n]}{k}, \{\{F, F'\} \; ; \; F, F' \in \binom{[n]}{k}, \; F \cap F' = \emptyset\} \right).$$

Exemplo 2.6 *Na Figura 2, temos a ilustração do grafo $KG_{5,2}$.*

Figura 2. *Grafo $KG_{5,2}$, conhecido também como Grafo de Petersen.*

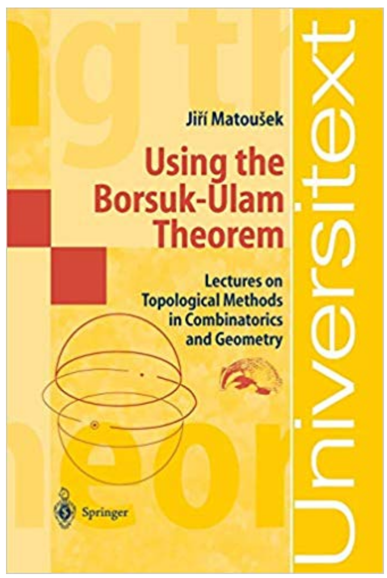


3. O Teorema de Borsuk-Ulam

O Teorema de Borsuk-Ulam é a saída topológica para demonstrar o Teorema de Lovász-Kneser. Sua história, segundo Jiři Matoušek, começa no ano 1930, quando a primeira menção foi feita em [LS30]. No entanto, a primeira prova de tal teorema, publicada em 1933 por Karol Borsuk, matemático polonês, atribui a formulação ao também matemático polonês Stanislaw Ulam. Um fato bastante curioso é que borsuk em polonês significa texugo, então se traduzirmos ao pé da letra para o português, teremos o *"Teorema do Texugo"*, o que motivou Matoušek a desenhar um texugo na capa de seu livro "Using the Borsuk-Ulam Theorem - Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry" [Mat08].

Figura 3. *Karol Borsuk (1905-1982) e Stanislaw Ulam (1909-1984), matemáticos poloneses.*

Figura 4. *Capa do livro "Using the Borsuk-Ulam Theorem - Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry" com um texugo.*



A afirmação do teorema é simples, mas sua demonstração, que utiliza ferramentas de Topologia Algébrica, não o é. Assim, apenas enunciaremos, mas para quem quiser dar uma olhada na demonstração, o livro [Hat02] apresenta uma prova bem elegante utilizando Teoria de Homologia.

Teorema 3.1 (Teorema de Borsuk-Ulam) *Sejam $n \geq 0$ e $f : S^n \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua, então existe $x \in S^n$ tal que $f(x) = f(-x)$.*

Podemos entender melhor a afirmação do Teorema de Borsuk-Ulam analisando um exemplo interessante para o caso $n = 2$. Identificando a esfera S^2 com a superfície do Globo Terrestre, definimos a função $f : S^2 \to \mathbb{R}^2$ como:

$$\begin{aligned} f : S^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto (T(x), P(x)) \,, \end{aligned}$$

onde $T(x)$ é a temperatura e $P(x)$ é a pressão atmosférica no ponto $x \in S^2$ da superfície do Globo Terrestre.

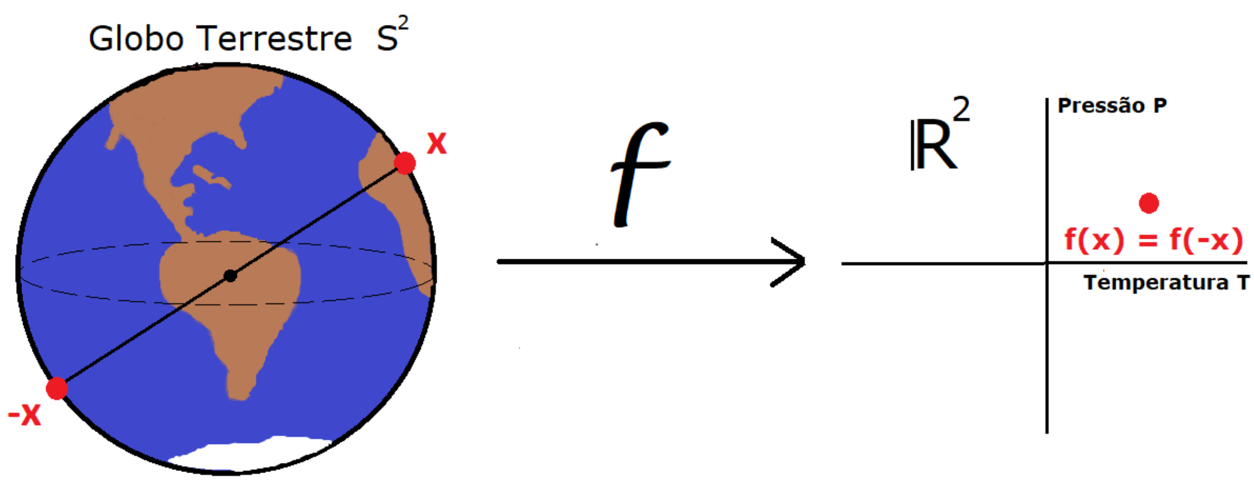
Como a Temperatura e a Pressão são funções contínuas na superfície do Globo Terrestre, segue que f é uma função contínua. Asssim, pelo Teorema de Borsuk-Ulam, existe um ponto $x \in S^2$ da superfície do Globo Terrestre tal que:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow (T(x), P(x)) = (T(-x), P(-x)),$$

isto é, existem pontos antípodas na superfície do Globo Terrestre que têm mesmas temperatura e pressão.

Veja na Figura 5 a ilustração deste exemplo.

Figura 5. *Ilustração do exemplo do Borsuk-Ulam para temperatura e pressão no Globo Terrestre.*



Enunciamos o Teorema de Borsuk-Ulam em sua versão mais clássica, mas ele pode ser reformulado em diversas afirmações, como pode ser conferido em [Mat08]. Para os nossos objetivos, focaremos nas afirmações equivalentes ao teorema dadas por [LS30], a partir de coberturas de S^n por abertos ou fechados, como segue.

Teorema 3.2 (Teorema de Borsuk-Ulam, versões de Lyustenik-Schelman) ***(LS-c)*** *Para qualquer cobertura* $F_1, ..., F_{n+1}$ *da esfera* S^n *(isto é,* $\bigcup_{i=1}^{n+1} F_i = S^n$*) por* $n+1$ *conjuntos fechados, existe ao menos um conjunto que contém um par de pontos antípodas, isto é, existe* $i \in [n+1]$ *tal que* $F_i \cap (-F_i) \neq \emptyset$.

(LS-o) *Para qualquer cobertura* $U_1, ..., U_{n+1}$ *da esfera* S^n *(isto é,* $\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = S^n$*) por* $n+1$ *conjuntos abertos, existe ao menos um conjunto que contém um par de pontos antípodas, isto é, existe* $i \in [n+1]$ *tal que* $U_i \cap (-U_i) \neq \emptyset$.

Temos um resultado ainda mais forte que o Teorema de Borsuk-Ulam, o qual faz a mesma afirmação para uma cobertura de $n+1$ conjuntos de S^n, agora podendo ser composta por abertos ou fechados. O resultado é conhecido como Lema de Greene.

Lema 3.3 *(Lema de Greene [Gre02]) Seja $A_1, ..., A_{n+1}$ uma cobertura de S^n por $n+1$ conjuntos, onde cada um deles é um aberto ou um fechado de S^n. Então, existe $i \in \{1, ..., n\}$ tal que $A_i \cap (-A_i) \neq \emptyset$.*

A demonstração do Lema de Greene é feita por indução em t, onde t é o número de fechados da cobertura $A_1, ..., A_{n+1}$ (ver [Gre02]). Note que o caso inicial $t = 0$ é o **Teorema 3.2 *(LS-o)***.

4. Teorema de Lovász-Kneser

Em 1955, o matemático alemão Martin Kneser propôs a seguinte conjectura:

Conjectura 4.1 *Para todo $k > 0$ e $n \geq 2k-1$, o número cromático do Grafo de Kneser $KG_{n,k}$ é igual a $n-2k+2$.*

Observação: Na verdade, em 1955, Kneser não formulou a conjectura nesta linguagem de Teoria dos Grafos, mas aqui já a enunciaremos direto nesta linguagem.

Em 1978, o matemático húngaro Lázló Lovász deu a primeira prova para a Conjectura de Kneser utilizando métodos topológicos e esta é considerada o marco do início de uma nova área: a Topologia Combinatória [Lon04].

Uma vez demonstrada, a Conjectura de Kneser passou a ser denominada **Teorema de Lovász-Kneser**.

Figura 6. *Martin Kneser (1928-2004), matemático alemão, e László Lovász (1948), matemático húngaro.*

Teorema de Lovász-Kneser. Para todo $k > 0$ e $n \geq 2k-1$, o número cromático do Grafo de Kneser $KG_{n,k}$ é igual a $n-2k+2$.

5. Demonstração do Teorema de Lovász-Kneser

Para provar que $\chi(KG_{n,k}) = n - 2k + 2$, basta demonstrar as seguintes desigualdades:

$$\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 2 \qquad (1)$$
$$\chi(KG_{n,k}) \geq n - 2k + 2 \qquad (2)$$

5.1 Demonstração da desigualdade $\chi(KG_{n,k}) \leq n - 2k + 2$

Para mostrar a Desigualdade **(1)**, basta exibir uma $(n - 2k + 2)$-coloração do Grafo de Kneser $KG_{n,k}$, e teremos que o número mínimo de cores para colorir o grafo será menor ou igual a $n - 2k + 2$.

Defina:

$$\chi : \binom{[n]}{k} \to [n - 2k + 2],$$

onde $\chi(F) = \min\{\min(F), n - 2k + 2\}$, para todo $F \in \binom{[n]}{k}$.

Os vértices do Grafo de Kneser $KG_{n,k}$ são os subconjuntos $F \subset [n]$ com exatamente k elementos. A cada um destes subconjuntos atribuimos uma cor de 1 a $(n - 2k + 2)$. Esta cor é definida como o menor entre $\min(F)$ e $n - 2k + 2$.

Provaremos que χ é, de fato, uma $(n - 2k + 2)$-coloração para $KG_{n,k}$. Para isto, basta tomar uma aresta qualquer do grafo e mostrar que os dois vértices estão coloridos com cores diferentes. A prova será feita por absurdo, isto é, suponhamos que exista uma aresta com vértices coloridos com a mesma cor e chegaremos a uma contradição.

Suponha que χ não seja uma coloração. Então, existem F, $F' \in \binom{[n]}{k}$ tais que $\{F, F'\}$ é uma aresta de $KG_{n,k}$ (isto é, $F \cap F' = \emptyset$) e temos $\chi(F) = i = \chi(F') \in [n - 2k + 2]$ (vértices da aresta coloridos com a mesma cor).

Separaremos em dois casos, agora: quando a cor em comum dos vértices i é $n - 2k + 2$ no primeiro caso e quando a cor em comum não é $n - 2k + 2$ (isto é, $i < n - 2k + 2$) no segundo caso.

$\boxed{\text{1º Caso:}}$ Se $i < n - 2k + 2$, então $i \in F$ e $i \in F'$ (pois, nesse caso, a cor i atribuida é $i = \min(F) = \min(F')$), logo $i \in F \cap F'$, o que contraria o fato de que $F \cap F' = \emptyset$.

$\boxed{\text{2º Caso:}}$ Por outro lado, se $i = n - 2k + 2$, então F, $F' \subset \{n - 2k + 2, ..., n\}$ (pois, nesse caso, $\min(F) \geq n - 2k + 2$ e $\min(F') \geq n - 2k + 2$), e como $F \cap F' = \emptyset$, temos $|F \sqcup F'| = 2k$. Mas como $|\{n - 2k + 2, ..., n\}| = 2k - 1$, temos uma contradição, pois não tem como um conjunto de $2k - 1$ elementos ter um subconjunto de $2k$ elementos.

Em ambos os casos temos uma contradição. Logo, χ é uma coloração.

♣

5.2 Demonstração da desigualdade $\chi(KG_{n,k}) \geq n - 2k + 2$

Demonstraremos a Desigualdade (2). Não se conhece nenhuma demonstração dessa desigualdade que não envolva métodos topológicos ou que não imitam as provas topológicas. Assim, não temos outra saída a não ser recorrer à Topologia.

Para mostrar que $\chi(KG_{n,k}) \geq n - 2k + 2$, suponhamos, por absurdo, $\chi(KG_{n,k}) < n - 2k + 2$, o que é equivalente a assumir que existe uma $(n - 2k + 1)$-coloração para $KG_{n,k}$ (pois $\chi(KG_{n,k}) < n - 2k + 2$ significa que podemos colorir com menos de $n - 2k + 2$ cores, logo podemos colorir com uma cor a menos, ou seja, $n - 2k + 1$ cores). O que mostraremos é que, assumindo essa coloração com $(n - 2k + 1)$ cores, obteremos uma contradição, não sendo possível, portanto, colorir com menos de $n - 2k + 2$, o que prova a Desigualdade (2).

Definimos $d = n - 2k + 1$ a fim de simplificar a notação.

A primeira coisa que faremos é identificar os elementos do conjunto $[n]$ com um subconjunto X de n pontos na esfera S^d. A única exigência que faremos a respeito da distribuição geométrica destes pontos é que eles estejam em posição geral, ou seja, que qualquer hiperplano em $\mathbb{R}^{d+1}$ passando pela origem não contenha mais do que d pontos destes.

Exemplo 5.1 *Para o caso $d = 1$, um subconjunto de n pontos está em posição geral em S^1 se não existe um par de pontos antípodas em X. No caso $d = 2$, o subconjunto $X \subset S^2$ de n pontos não deve conter três pontos em um mesmo plano que passa pela origem.*

Identificando X com $[n]$, conquentemente identificamos $\binom{X}{k}$ com $\binom{[n]}{k}$. Nos referimos ao conjunto $[n]$ por meio dessa identificação a partir de agora.

Finalmente, é chegada a hora da Topologia entrar em ação. Definiremos $d + 1$ subconjuntos de S^d, de modo que os d primeiros são abertos e o último um fechado de S^d, e estes formam uma cobertura da esfera, isto é, $\bigcup_{i=1}^{d+1} A_i = S^d$. Em seguida, aplicaremos o Lema de Greene (**Lema 3.3**).

Suponha $\chi : \binom{[n]}{k} \to [d]$ uma d-coloração de $KG_{n,k}$.

Definiremos os subconjuntos abertos $A_1, A_2, ..., A_d$ da seguinte forma: $x \in A_i$ se, e somente se, existe $F \in \binom{X}{k}$ tal que $\chi(F) = i$ e $F \subset H(x)$, onde $H(x)$ é o hemisfério aberto definido por:

$$H(x) = \{y \in S^d \; ; \langle x, y \rangle > 0\}.$$

A Figura 8 ilustra como foram definidos os subconjuntos A_i, $i \in [d]$.

Para visualizar melhor, imagine que $H(x)$ é o *"hemisfério norte"* do globo S^d e x é o *"polo norte"*.

Definimos o *"equador de x"* como sendo

$$\text{“}\textit{equador de } x\text{”} = \{y \in S^d \; ; \langle x, y \rangle = 0\}.$$

.

Como o nome sugere, esta seria a *"linha do equador"* no globo onde x é o *"polo norte"*.

A Figura 7 ilustra as definições de $H(x)$ e *"equador de x"*, para algum $x \in S^d$.

Figura 7. *Ilustração de $H(x)$ e "equador de x", para algum $x \in S^d$.*

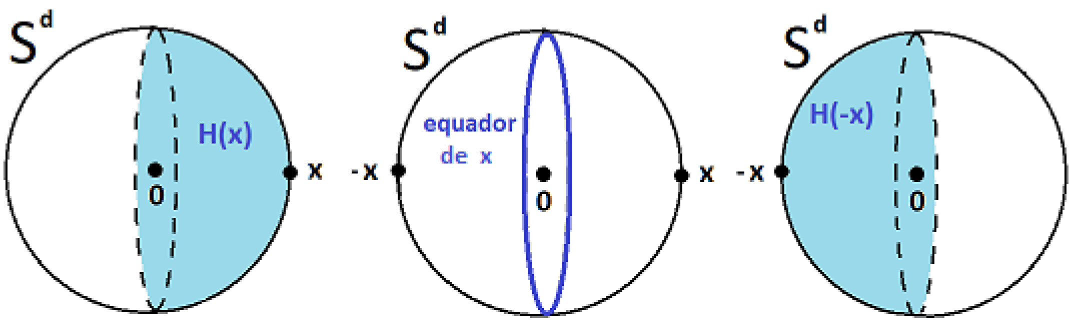
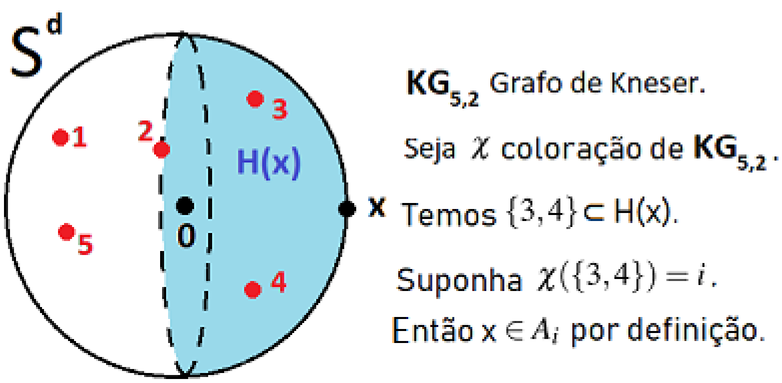


Figura 8. *Exemplo ilustrando a definição do aberto A_i, $i \in [d]$.*



Em seguida, definimos:

$$A_{d+1} = S^d \setminus (\bigcup_{i=1}^{d} A_i),$$

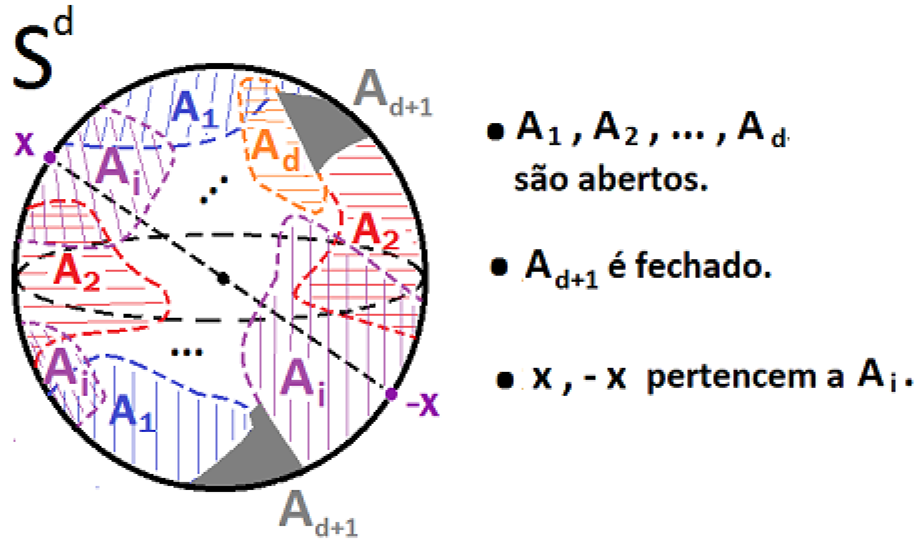
que é um fechado de S^d (pois é complementar do aberto $\bigcup_{i=1}^{d} A_i$).

Assim, $\bigcup_{i=1}^{d+1} A_i = S^d$ e temos uma cobertura de S^d por $d+1$ subconjuntos, sendo estes abertos ou fechados e, pelo Lema de Greene (**Lema 3.3**), chegamos à seguinte conclusão:

existe $x \in S^d$ tal que $x, -x \in A_i$, para algum $i \in [d+1]$.

Esta conclusão gera uma contradição.

Figura 9. *Ilustração da cobertura* $\bigcup_{i=1}^{d+1} A_i = S^d$.



Separaremos em dois casos:

$\boxed{1^{\text{o}} \text{ Caso:}}$ $i \in [d]$.

Sabendo que $x, -x \in A_i$, por definição existem $F, F' \in \binom{[n]}{k}$, onde $F \subset H(x)$, $F' \subset H(-x)$ e $\chi(F) = i = \chi(F')$.

Como $H(x) \cap H(-x) = \emptyset$, segue que $\{F, F'\}$ é uma aresta de $KG_{n,k}$, por definição. Assim, $\{F, F'\}$ é uma aresta de $KG_{n,k}$, onde $\chi(F) = \chi(F')$, o que é uma **contradição** com o fato de χ ser uma d-coloração.

$\boxed{2^{\text{o}} \text{ Caso:}}$ $i = d + 1$.

Neste caso, existem $x, -x \in A_{d+1} = S^d \setminus (\bigcup_{i=1}^{d} A_i)$.

Note que, como $x, -x \in A_{d+1}$, então $x, -x$ não pertencem a nenhum A_i (para $i \in [d]$), logo não existem mais do que k pontos tanto em $H(x)$ quanto em $H(-x)$, pois, caso contrário existiriam $F, F' \in \binom{[n]}{k}$ tais que $F \subset H(x)$ e $F' \subset H(-x)$ respectivamente, e isso implicaria que $x \in A_{\chi(F)}$ e $-x \in A_{\chi(F')}$ $(\chi(F), \chi(F') \in [d])$, respectivamente.

Temos n pontos em S^d (em posição geral) identificados com $[n]$.

Como pode ser visualizado na Figura 7, a esfera S^d pode ser visualizada como a união disjunta

$$S^d = H(x) \sqcup H(-x) \sqcup \text{“}\textit{equador de } x\text{”}.$$

Como $|H(x) \cap [n]|, |H(-x) \cap [n]| \leq k - 1$, segue que no *“equador de x”* temos no mínimo $n - 2(k-1) = n - 2k + 2 = (n - 2k + 1) + 1 = d + 1$ pontos de $[n]$, o que **contradiz** a hipótese destes n pontos estarem em posição geral, pois o hiperplano que define o *“equador de x”* em $S^d \subset \mathbb{R}^{d+1}$ contêm pelo menos $d + 1$ destes pontos.

Desta forma, assumindo a possibilidade de $KG_{n,k}$ ter uma d-coloração, obtemos sempre uma contradição. Logo, é preciso mais do que $d = n - 2k + 1$ cores (isto é, pelo menos $n - 2k + 2$ cores) para colorir o grafo $KG_{n,k}$, o que significa

$$\chi(KG_{n,k}) \geq n - 2k + 2.$$

♣

6. Voltando ao Problema inicial

Traduziremos o problema inicial em uma linguagem de Teoria dos Grafos.

Cidades: Temos um total de 10 cidades no estado, que serão reresentadas pelo conjunto $S = [10]$.

Linhas interurbanas: Cada linha interurbana entre duas cidades desse estado pode ser representada como um subconjunto (com exatamente 2 elementos) do conjunto [10] das cidades, isto é, um subconjunto $\{C_i, C_j\} \subset [10]$ (onde $C_i \neq C_j$) representa a linha interurbana entre as cidades C_i e C_j. Assim, o conjunto das linhas interurbanas será representado por $\binom{[10]}{2}$.

Exclusividade na atribuição das linhas interurbanas às empresas: Podemos representar uma atribuição entre m empresas através de uma função

$$\varphi : \binom{[10]}{2} \to [m],$$

pois, assim, garantimos exclusividade para cada linha interurbana garantida à empresa.

Podemos visualizar φ como uma atribuição de cores aos vértices do grafo $KG_{10,2}$ (isto é, $\binom{[10]}{2}$). Utilizamos m cores para tal atribuição, mas até agora não é necessário que φ seja uma coloração. No entanto, a condição de logística imposta pelas empresas ao governador é exatamente que φ seja uma coloração.

Exigência de logística feita pelas empresas: Exigir duas linhas interurbanas $L_1, L_2 \in \binom{[10]}{2}$ atribuídas a uma mesma empresa (mesma cor, olhando através de φ) tenham uma cidade em comum, significa que $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ (ou seja, $\{L_1, L_2\}$ é uma aresta de $KG_{10,2}$).

Em outras palavras, para cada aresta $\{L_1, L_2\} \in \binom{[10]}{2}$ de $KG_{10,2}$, temos cores (representando as empresas) diferentes, isto é, $\varphi(L_1) \neq \varphi(L_2)$. Assim, a condição imposta é que φ seja uma m-coloração.

Resolvendo o problema do governador: O governador quer economizar com fiscalização contratando o menor número possível de linhas. Como mostrado aqui, esse problema é o mesmo de saber qual o menor número m de cores para a coloração $\varphi : \binom{[10]}{2} \to [m]$, o que por definição é o número cromático do grafo $KG_{10,2}$, denotado por $\chi(KG_{10,2})$.

Pelo **Teorema de Lovász-Kneser** temos que:

$$\chi(KG_{10,2}) = 10 - 2 \cdot 2 + 2 = 10 - 4 + 2 = 8.$$

Assim, o governador precisará contratar ao menos 8 empresas para satisfazer as condições.

7. Agradecimentos

Agradeço à minha orientadora de Mestrado (e atualmente de Doutorado) Profª Drª Denise de Mattos. Agradeço à FAPESP (Processo 2017/08020-1) pelo apoio financeiro durante o mestrado, quando o Teorema de Lovász- Kneser e outros teoremas que empregam métodos topológicos foram por mim estudados e também pelo apoio financeiro atual no Doutorado (Processo FAPESP 2018/23928-2), quando esse artigo foi escrito.

Referências

[Gre02] Greene, J. E. A new short proof of Kneser's conjecture. *The American mathematical monthly, JSTOR, v. 109, n. 10, p. 918–920*, 2002.

[Hat02] Hatcher, A. Algebraic Topology *Cambridge: Cambridge University Press*, 2002.

[Lon04] Longueville, M. 25 years proof of the Kneser conjecture the advent of topological combinatorics *EMS Newsletter, v. 53, p. 16–19* , 2004.

[Mat08] Matoušek, J. Using the Borsuk-Ulam theorem: lectures on topological methods in combinatorics and geometry. *Cambridge: Springer Science & Business Media*, 2008.

[LS30] L. Lyusternik and S. Shnirel'man . Topological Methods in Variational Problems (in Russian) *Issledowatelskiĭ Institut Matematiki i Mechaniki prio O. M. G. U.*, Moscow, 1930.