Fixando um comprimento, qual a figura de maior área?

Gabriel Silva Lucidio*

Universidade Federal de São Carlos
lucidio@dm.ufscar.br

Resumo

Este artigo tem como finalidade apresentar, a partir de uma abordagem geométrica, um problema estudado desde a Grécia Antiga: a Desigualdade Isoperimétrica. Em suma, esse problema compara a área de curvas fechadas no plano, com um dado comprimento finito, de modo a estabelecer um certo padrão, sendo a circunferência a figura de maior área.

1. Introdução

O Problema Isoperimétrico estabelece o seguinte: "Entre todas as curvas planas fechadas, com um dado comprimento finito, a circunferência é a que engloba maior área." Problemas desse tipo foram estudados pelo grego Pappus de Alexandria (c. 290 - c. 350) no Livro V de sua obra Coleção Matemática (Século IV d.C.).


PAPPI
ALEXANDRINI
MATHEMATICAE
Collectiones.
A FEDERICO
COMMANDINO
VRBINATÆ
In Latinum Conuersæ, & Commentarijs
Illustratæ.
VENETIIS.
Apud Franciscum de Franciscis Senensem.
M. D. LXXXIX.

Coleção Matemática, Pappus de Alexandria

Embora nenhuma prova formal seja conhecida daquela época, o resultado do problema era bastante aceito. Isso teria, inclusive, influenciado na organização de cidades durante a idade média, como Paris (França), Braga (Portugal) e Colônia (Alemanha).

Uma referência do problema isoperimétrico é feita na história da Rainha Dido, canto VI da obra de Virgílio. A seguir está o enunciado de uma versão dessa história, conhecida como "A Lenda de Dido":

*Este artigo é resultado de um Trabalho de Conclusão de Curso para obtenção do título de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal de São Carlos, realizado sob a orientação do Prof. Dr. Renato José de Moura.

> Após ter o marido assassinado, a princesa Dido precisou fugir com seguidores para fundar uma nova cidade. Refugiou-se então na costa do mar mediterrâneo no norte da África, onde negociou com o Rei Jarbas a compra das terras. Ficou acertado que ela poderia comprar apenas a quantidade de terra que conseguisse cercar com a pele de um boi. Dido e seu séquito decidem então cortar a pele em tiras muito finas e emendá-las, formando uma corda bem comprida. Como a região a ser escolhida ficava na beira do mar eles decidiram que o formato do terreno seria um semicírculo a ser contornado por esta corda. A cidade fundada por Dido recebeu o nome de Cartago (inicialmente Birsa, que significa *couro*).

Em 1838, o suíço Jakob Steiner propôs uma demonstração formal para o problema. Todavia, em 1870, o alemão Karl Wilhelm Theodor Weierstrass provou que a demonstração de Steiner estava incompleta. Weierstrass foi o primeiro a provar de forma rigorosa o resultado, em seus estudos na Teoria de Cálculo das Variações.

Karl Wilhelm Theodor Weierstrass *(1815 - 1897)*

2. Fórmulas de Heron e de Bretschneider

As Fórmulas de Heron e de Bretschneider são resultados clássicos no estudo de áreas envolvendo triângulos e quadriláteros. A primeira pode ser encontrada no livro *Metrica* de Heron de Alexandria (c. 62 d.C.), enquanto a segunda foi provada em 1842 pelo matemático alemão Carl Anton Bretschneider.

Notações: Se A e B são pontos de $\mathbb{R}^2$, então AB denota o segmento que os liga, e $\overline{AB}$ denota o comprimento desse segmento. Além disso, se A, B e C são pontos não colineares, então ABC denota o triângulo por eles determinado, e $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ denotam os ângulos internos desse triângulo em cada um dos vértices. De modo geral, uma poligonal determinada por n pontos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é denotada por $A_1A_2\ldots A_n$, enquanto que seus ângulos internos são denotados por $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \ldots, \hat{A}_n$.

Teorema 1. *(Fórmula de Heron)* Considere um triângulo ABC de lados $a := \overline{AB}, b := \overline{BC}, c := \overline{CA}$ e perímetro p. Então sua área é dada por:

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)}.$$

Prova. Sejam h a altura do triângulo relativa ao vértice B, e H a interseção desta com o lado AC. Dessa forma, $\overline{AH} = \sqrt{a^2 - h^2}$ e $\cos(\hat{A}) = \frac{\sqrt{a^2-h^2}}{a}$. Ainda, pela Lei dos Cossenos, $b^2 =$

$a^2 + c^2 - 2ac\cos(\hat{A})$. Logo:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}\right)^2.$$

Como a área do triângulo é dada por $S = \frac{ch}{2}$, então:

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{c^2}{4}\left[a^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2\right] = \frac{-1}{16}\left[(a^2+c^2-b^2)^2 - (2ac)^2\right] \\
&= \frac{-1}{16}\left[(a^2+c^2-b^2-2ac)(a^2+c^2-b^2+2ac)\right] \\
&= \frac{-1}{16}\left[((a-c)^2-b^2)((a+c)^2-b^2)\right] \\
&= \frac{1}{16}(a+c-b)(a+c+b)(-a+c+b)(a-c+b) \\
&= \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)
\end{aligned}$$

Portanto:

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}.$$

□

Utilizando a Fórmula de Heron, é possível estabelecer algumas proposições relevantes, e que serão utilizadas para auxiliar em outros resultados da próxima seção.

Proposição 1. Dentre todos os triângulos com medida de uma das bases fixada e perímetro dado, o de maior área é o isósceles.

Prova. Considere um triângulo com lados a, b, c e perímetro p. Pela Fórmula de Heron, a área S desse triângulo é:

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que a base fixada seja a de medida a. É preciso então maximizar a seguinte função:

$$K(b,c) := \left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right).$$

Como $p = a + b + c$, é possível isolar b e substituir em K. Com isso, é obtida a seguinte função quadrática de uma variável:

$$K(c) = -c^2 + (p-a)c + \frac{p}{2}a - \frac{p^2}{4}.$$

Derivando, obtém-se:

$$K'(c) = 0 \iff -2c + p - a = 0 \iff c = \frac{p-a}{2}.$$

Dessa maneira, $c = \frac{p-a}{2}$ é o único ponto crítico. Para verificar que este é um ponto de máximo, basta observar que a segunda derivada de K é negativa neste ponto:

$$K''(c) = -2 < 0.$$

Portanto, a função assume máximo em $c = \frac{p-a}{2}$. Consequentemente $b = c$, ou seja, o triângulo deve ser isósceles para que se tenha área máxima. □

Proposição 2. Sejam ABC e ABC' dois triângulos com mesmo perímetro p. Se $|\overline{AC} - \overline{BC}| < |\overline{AC'} - \overline{BC'}|$, então a área de ABC é maior do que a área de ABC'.

Prova. Sejam $a := \overline{AB}$, $b := \overline{BC}$, $c := \overline{CA}$, $b' := \overline{BC'}$ e $c' := \overline{C'A}$.

De acordo com a proposição precedente, é suficiente provar que $K(c) > K(c')$. Como $p = a + b + c = a + b' + c'$, essa condição pode ser simplificada:

$$\begin{aligned} K(c) > K(c') &\iff (p-a)c - c^2 > (p-a)c' - (c')^2 \iff (b+c)c - c^2 > (b'+c')c' - (c')^2 \\ &\iff bc > b'c'. \end{aligned}$$

Desse modo, basta provar que $cb > c'b'$. Novamente pelo fato de que $b + c = b' + c'$, obtém-se:

$$b^2 + 2bc + c^2 = b'^2 + 2b'c' + c'^2 \Rightarrow b^2 + c^2 = b'^2 + c'^2 + 2b'c' - 2bc. \quad (1)$$

Agora, pela hipótese, tem-se ainda:

$$|c - b|^2 = c^2 - 2bc + b^2 < c'^2 - 2b'c' + b'^2.$$

Logo:

$$c^2 - 2bc + b^2 < c'^2 - 2b'c' + b'^2. \quad (2)$$

Utilizando (1) e (2), é obtido o resultado final: $b'c' < bc$. □

Observação: De modo intuitivo, a proposição precedente evidencia que, quanto menor a diferença entre os comprimentos dos lados não fixados de um triângulo, i.e., quanto "mais isósceles" ele for, maior será sua área.

Proposição 3. Dentre todos os triângulos com perímetro fixado, o de maior área é o equilátero.

Prova. Pela proposição precedente, basta considerar triângulos isósceles. Considere, então, um triângulo de base a e dois lados $\frac{p-a}{2}$, em que p é o perímetro fixado. Pela Fórmula de Heron, a área S deste triângulo é dada por:

$$S = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\frac{a^2}{4}}.$$

Como é necessário encontrar o comprimento a que maximiza essa área, basta considerar a seguinte função:

$$f(a) = \left(\frac{p}{2} - a\right)\frac{a^2}{4} = \frac{pa^2}{8} - \frac{a^3}{4}.$$

Derivando essa função e igualando a zero, tem-se:

$$f'(a) = 0 \iff \frac{pa}{4} - \frac{3a^2}{4} = 0 \iff a = \frac{p}{3}.$$

Dessa forma, $a = \frac{p}{3}$ é o ponto crítico de f. Para concluir que este é de fato o ponto de máximo, basta verificar se a segunda derivada é negativa neste ponto:

$$f''(a) = \frac{p - 6a}{4} \Rightarrow f''(a)|_{a=p/3} = \frac{p - 2p}{4} < 0.$$

□

Finalmente é apresentada a Fórmula de Bretschneider, que pode ser vista como uma generalização da Fórmula de Heron para quadriláteros. Em seguida, alguns corolários serão também demonstrados.

Teorema 2. *(Fórmula de Bretschneider)* Considere um quadrilátero $ABCD$ de lados $a := \overline{AB}$, $b := \overline{BC}$, $c := \overline{CD}$, $d := \overline{DA}$, ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$, e perímetro $p = a + b + c + d$. Então sua área S é dada por:

$$S = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)\left(\frac{p}{2} - d\right) - \frac{1}{2}abcd\left[1 + \cos\left(\hat{A} + \hat{C}\right)\right]}.$$

Prova. Inicialmente, é possível fazer uma divisão do quadrilátero em dois triângulos, a partir da diagonal BD. Dessa forma, a área é:

$$S = \frac{1}{2}ad \cdot \operatorname{sen}(\hat{A}) + \frac{1}{2}bc \cdot \operatorname{sen}(\hat{C}).$$

Então:

$$4S^2 = a^2d^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\hat{A}) + b^2c^2 \cdot \operatorname{sen}^2(\hat{C}) + 2abcd \cdot \operatorname{sen}(\hat{A}) \cdot \operatorname{sen}(\hat{C}). \tag{3}$$

Além disso, pela Lei dos Cossenos é possível calcular a diagonal $\overline{BD}$:

$$\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos(\hat{A}) = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\hat{C}).$$

Elevando os dois lados desta igualdade ao quadrado:

$$\frac{(a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}{4} = a^2d^2 \cdot \cos^2(\hat{A}) + b^2c^2 \cdot \cos^2(\hat{C}) - 2abcd \cdot \cos(\hat{A}) \cdot \cos(\hat{C}). \tag{4}$$

Somando (3) e (4):

$$4S^2 + \frac{(a^2 + c^2 - b^2 - d^2)^2}{4} = a^2d^2 + b^2c^2 - 2abcd \cdot \cos(\hat{A} + \hat{C}). \tag{5}$$

Por fim, substituindo o valor de p[1], é obtido o resultado final:

$$S = \sqrt{\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)\left(\frac{p}{2} - d\right) - \frac{1}{2}abcd\left[1 + \cos\left(\hat{A} + \hat{C}\right)\right]}.$$

□

Observação: Um quadrilátero é inscritível se existe uma circunferência que o circunscreve. Pode-se provar que um quadrilátero é inscritível se, e somente se, ele tem um par de ângulos opostos suplementares.

Corolário 1. Dentre todos os quadriláteros com comprimentos de lados fixados, aquele de maior área é o inscritível.

Prova. Pela Fórmula de Bretschneider, para que a área S seja maximizada, basta minimizar o valor $1 + cos(\hat{A} + \hat{C})$ (já que os lados estão fixados).

Como a função cosseno é limitada inferiormente por -1, é necessário ter $\hat{A} + \hat{C} = \pi$. Portanto, $\hat{A}$ e $\hat{C}$ devem ser ângulos opostos suplementares, ou seja, o quadrilátero deve ser inscritível (para que se tenha área máxima). □

[1] Para este passo, é recomendado substituir o valor de p diretamente na fórmula final, abrir os parênteses, e assim obter o valor da fórmula (5) através de equivalências.

Corolário 2. Sejam $ABCD$ e $A'B'C'D'$ dois quadriláteros com lados correspondentes de mesmo comprimento. Se $|\hat{A}+\hat{C}-\pi| < |\hat{A}'+\hat{C}'-\pi|$, então a área de $ABCD$ é maior do que a área de $A'B'C'D'$.

Prova. Pelo corolário precedente, sabe-se que o valor máximo é assumido se $\hat{A}+\hat{C}=\pi$. No intervalo $[0,2\pi]$ a função cosseno assume mínimo em π. Por outro lado, quanto mais distante o ângulo $\hat{A}+\hat{C}$ estiver de π, maior será o valor de seu cosseno (no intervalo em questão), o que minimiza o valor da área S na Fórmula de Bretschneider. $\square$

Observação: De modo intuitivo, o corolário precedente evidencia que, quanto menor a diferença entre um par de ângulos opostos e π, i.e., quanto "mais próximo de se tornar inscritível" ele estiver, maior será sua área.

3. Resultados Auxiliares

Serão feitos agora alguns resultados mais técnicos, os quais serão utilizados para estabelecer o teorema principal: a Desigualdade Isoperimétrica. Aqui as três proposições da seção anterior, advindas da Fórmula de Heron, serão necessárias.

Proposição 4. Dado um polígono não convexo, há outro polígono com menor número de lados, menor perímetro e área maior.

Prova. A ideia para esta prova é encontrar um par de vértices não consecutivos, de modo que a reta passando por eles tenha o polígono inteiramente contido em um dos semiplanos por ela determinados. O novo polígono buscado será obtido substituindo a parte interior da poligonal ligando esses dois pontos pelo segmento que os liga.

Para tal feito, considere, sem perda de generalidade, um sistema cartesiano no plano, de modo que o polígono esteja inteiramente contido no primeiro quadrante. Seja P_0 o vértice com máxima coordenada abscissa. A reta vertical r (perpendicular ao eixo das abscissas), que passa por P_0, tem todo o polígono contido em um dos semiplanos por ela determinados.

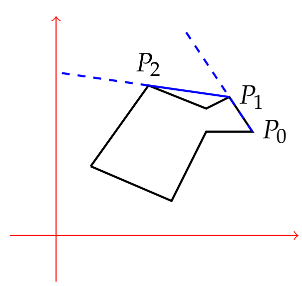


Figura 1

Trace semirretas com origem em P_0 e passando por cada um dos outros vértices do polígono. Dentre estas semirretas, fixe a que formar o menor ângulo (no sentido anti-horário) com r. Se o vértice encontrado nesta reta não for consecutivo com P_0, já estão obtidos os dois vértices desejados.

Agora, se o vértice encontrado for consecutivo, então o segmento que liga esses pontos é um lado do polígono, digamos P_0P_1. Para a reta suporte de P_0P_1, faça o mesmo procedimento anterior até encontrar um novo vértice do polígono. Caso necessário, faça novamente o processo para

P_1P_2, e assim sucessivamente. Como o polígono é não convexo, em algum desses passos serão encontrados dois vértices não consecutivos.

□

Lema 1. Sejam P um polígono equilátero não regular de lado l e P' um polígono regular de lado l com mesmo número de lados de P. Se o ângulo interno de P' é α, então, em P, há pelo menos quatro vértices cujos ângulos são diferentes de α.

Prova. Sejam $P := A_1 \ldots A_n$ um polígono equilátero não regular de lado l e $P' := B_1 \ldots B_n$ o polígono regular correspondente (de lado l e ângulo α). Suponha que os únicos vértices de P com ângulos possivelmente diferentes de α sejam A_i, A_j e A_k.

Dessa forma, são congruentes os seguintes polígonos:

- $A_iA_{i+1} \ldots A_j$ e $B_iB_{i+1} \ldots B_j$;
- $A_jA_{j+1} \ldots A_k$ e $B_jB_{j+1} \ldots B_k$;
- $A_kA_{k+1} \ldots A_i$ e $B_kB_{k+1} \ldots B_i$.

Por conseguinte, são também congruentes os triângulos $A_iA_jA_k$ e $B_iB_jB_k$. Todas essas congruências implicam que os ângulos $\hat{A}_i$, $\hat{A}_j$, $\hat{A}_k$ têm medida α, contradizendo a hipótese inicial.

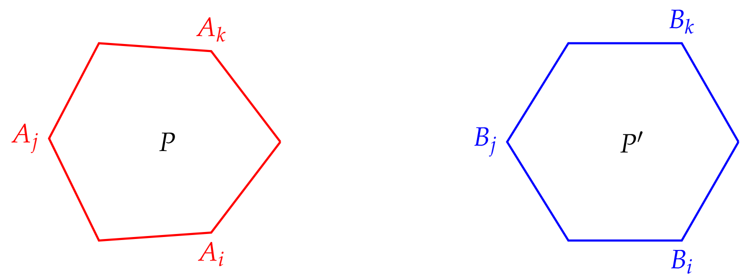


Figura 2

□

Proposição 5. Dado qualquer polígono não regular, há um polígono regular com número de lados menor ou igual, perímetro menor ou igual e área maior do que a do polígono original.

Prova. Esta prova é feita por indução sobre o número de lados. Inicialmente é obtido um polígono equilátero e, depois, um polígono regular, com o mesmo número de lados do polígono original, sempre aumentando a área em cada passo. Esse processo é utilizado enquanto o polígono for convexo. Se em algum momento o polígono não for convexo, a Proposição 4 fornece um polígono com número de lados menor, perímetro menor e área maior. A partir daí, o resultado segue pela hipótese de indução.

Para o primeiro passo de indução, considere um triângulo não regular de lados a, b, c e perímetro p. Basta então tomar um triângulo equilátero de lado $l = \frac{p}{3}$, o qual é um polígono com mesmo perímetro, mesmo número de lados, e área maior do que a do triângulo original (pela Proposição 3).

Seja agora um polígono com n lados ($n \geq 4$), e assuma o resultado válido para polígonos de até $n-1$ lados. Pela observação inicial, para o processo aqui descrito, pode-se supor, sem perda de generalidade, que o polígono é convexo em cada passo. Primeiramente é construído um polígono equilátero a partir do original. Suponha que o polígono em questão não seja equilátero, caso contrário não há o que ser feito até aqui. Considere a média aritmética l de todos os lados do polígono.

Como o polígono é não equilátero, existem ao menos dois lados sendo um de tamanho maior e outro de tamanho menor do que l. Suponha a existência de tais dois lados que sejam adjacentes, digamos AB e BC, com $a := \overline{AB} > l$ e $b := \overline{BC} < l$ (Figura 3). Tome então um ponto B' no mesmo semiplano de B determinado por AC, de modo que se tenha $\overline{AB'} = l$, e que o perímetro de ABC seja igual ao perímetro de $AB'C$. Dessarte, basta verificar que a área foi aumentada (já que o perímetro e o número de lados se mantiveram). Denote $c := \overline{CA}$, $x := \overline{B'C}$, $p := a + b + c = l + x + c$.

Diante disso, $x = a + b - l$. Logo, como $a > l$, então $x > b$. Além disso, segue que:

$$|\overline{AB'} - \overline{B'C}| = |l - x| < |l - b| < |a - b| = |\overline{AB} - \overline{BC}|.$$

Pela Proposição 2, a área de $AB'C$ é maior do que a área de ABC.

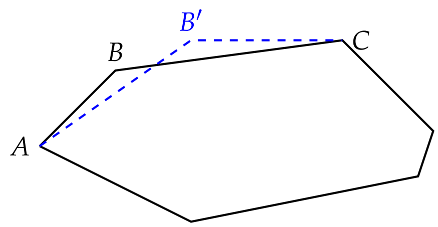


Figura 3

Caso não existam tais dois lados adjacentes, é possível permutar os lados de modo a obter esta situação (Figura 4). De fato, dados dois lados adjacentes AB e BC, substitua B por B', de modo que se tenha $\overline{AB'} = \overline{BC}$, $\overline{B'C} = \overline{AB}$ e estando B' no mesmo semiplano de B determinado pela reta que passa por AC. A área e o perímetro ficam, neste caso, inalterados, uma vez que os triângulos ABC e $CB'A$ são congruentes pelo critério LLL. (Faça esta permutação até que o lado maior do que l seja adjacente ao lado menor do que l.)

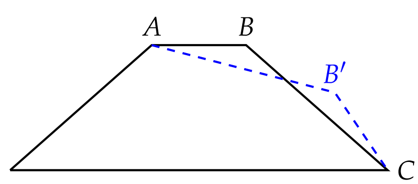


Figura 4

Prosseguindo assim em cada um dos lados, está sendo aumentado o número de lados com comprimento l, até o polígono se tornar equilátero, sempre aumentando sua área.

Agora é descrito um processo para tornar o polígono equiângulo e, portanto, regular (Figura 5).

Considere o polígono regular correspondente (com n lados, ambos de tamanho l) com ângulo interno α. Seja X o conjunto dos vértices (no polígono equilátero não regular) cujos ângulos são diferentes de α. Ao indexar esses vértices na ordem original em que estavam no polígono, é possível escrever $X = \{C_1, \ldots, C_r\}$.

Pelo Lema 1, X possui ao menos quatro elementos. Considere então, em X, quatro pontos distintos $C_i, C_{i+1}, C_j, C_{j+1}$ ($j > i+1$), de modo que se tenha $\hat{C}_i > \alpha$ e $\hat{C}_{j+1} < \alpha$. A ideia é deformar o quadrilátero $C_iC_{i+1}C_jC_{j+1}$ diminuindo C_i e C_j, aumentando C_{i+1} e C_{j+1}, de modo que $\hat{C}_i$ ou $\hat{C}_{j+1}$ fiquem com tamanho α (vistos como ângulos do polígono). Feito isso, basta aplicar o processo sucessivamente, até X ter apenas três elementos e, dessa forma, o Lema 1 conclui o resultado.

Ao deformar o quadrilátero, deforma-se também o polígono, mantendo rígidos os arcos entre dois vértices consecutivos do quadrilátero. Considere a circunferência circunscrita ao polígono regular e, em seguida, uma outra circunferência de mesmo raio (no polígono não regular), passando por C_i, C_{j+1}.

Sejam C'_{i+1} e C'_j as interseções desta circunferência com a reta que passa por C_{i+1} e C_j. Assim, $C_{j+1}\hat{C}_iC_{i+1} > C_{j+1}\hat{C}_iC'_{i+1}$ e $C_{j+1}\hat{C}_jC_{i+1} > C_{j+1}\hat{C}'_jC_{i+1}$. Como o novo quadrilátero é inscritível, isso implica que $C_{j+1}\hat{C}_iC_{i+1} + C_{j+1}\hat{C}_jC_{i+1} > C_{j+1}\hat{C}_iC'_{i+1} + C_{j+1}\hat{C}'_jC_{i+1} = \pi$.

Considerando agora o polígono obtido pela troca dos vértices C_j por C'_j e C_{i+1} por C'_{i+1}, este tem perímetro menor ou igual, mesmo número de lados e área maior do que o anterior. Outrossim, como a circunferência foi construída a partir do polígono regular, segue dos Corolários 1 e 2 que ao menos um dos ângulos $C'_{i+1}\hat{C}_iC_{j+1}$ ou $C_i\hat{C}_{j+1}C'_j$ tem tamanho α.

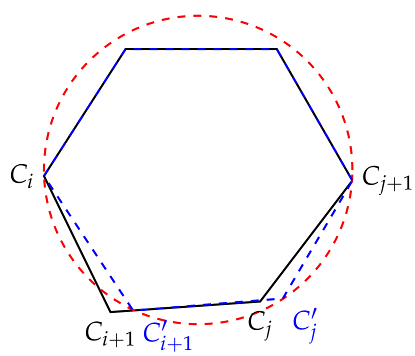


Figura 5

□

O teorema a seguir pode ser entendido, grosso modo, como a Desigualdade Isoperimétrica para polígonos regulares. Ele será, inclusive, utilizado para a demonstração do caso mais geral apresentado na próxima seção.

Teorema 3. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$, com $3 \leq n < m$. A área de um polígono regular de n lados é menor do que a área de um polígono regular de m lados, com mesmo perímetro. Além disso, a área da circunferência é maior que a área de qualquer polígono regular com mesmo perímetro.

Prova. Para ilustrar o resultado, considere inicialmente $n = 3$ e $m = 4$, ou seja, um triângulo equilátero de perímetro p, com área S_1, e um quadrado de mesmo perímetro, com área S_2. Pelos

Teoremas 1 e 2, têm-se:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-\frac{p}{3}\right)^3} = \frac{p^2}{12\sqrt{3}}; \\ S_2 &= \sqrt{\left(\frac{p}{2}-\frac{p}{4}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{p}{4}\right)^4[1+cos(\pi)]} = \sqrt{\left(\frac{p}{2}-\frac{p}{4}\right)^4} = \frac{p^2}{16}. \end{aligned}$$

Logo, $S_1 < S_2$. Para o resultado geral, considere um polígono regular de n lados com perímetro p, e separe-o em triângulos isósceles com base nos lados e vértice no centro da circunferência circunscrita ao polígono.

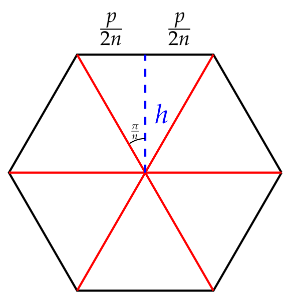


Figura 6

Em cada triângulo, o ângulo oposto à base é dado por $\frac{2\pi}{n}$ e a base mede $\frac{p}{n}$. Traçando a altura, são obtidos dois triângulos retângulos com um cateto sendo a altura h, e o outro medindo $\frac{p}{2n}$. Pela definição de tangente, tem-se:

$$h = \frac{p}{2n} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

A área $T(n)$ de cada triângulo é, pois:

$$T(n) = \frac{p^2}{4n^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Consequentemente, a área $A(n)$ do polígono regular de n lados e perímetro p é dada por:

$$A(n) = n \cdot T(n) = \frac{p^2}{4n} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}.$$

Para concluir a primeira parte do teorema, basta mostrar que essa função é estritamente crescente para $n \geq 3$. Derivando, obtém-se:

$$A'(n) = p^2 \left[\frac{\frac{\pi}{n}\sec^2\left(\frac{\pi}{n}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{8n^2\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}\right].$$

Deste modo:

$$\begin{aligned} A'(n) > 0 \quad &\iff \quad \frac{\pi}{n}\sec^2\left(\frac{\pi}{n}\right) > \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right) \iff \frac{\pi}{n} > \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \\ &\iff \quad \frac{2\pi}{n} > \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

A última desigualdade, por sua vez, é válida para $\frac{2\pi}{n} > 0$. Como está sendo considerado $n \geq 3$, essa condição é verificada e, pois, $A'(n) > 0$ para $n \geq 3$.

Para finalizar o teorema, é necessário verificar que o limite da função $A(n)$, para $n \to \infty$, é justamente a área da circunferência de perímetro p, i.e., o valor $\frac{p^2}{4\pi}$. E de fato:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A(n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{p^2}{4n \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{p^2}{4n}}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \underset{L'Hospital}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-p^2}{4n^2}}{\frac{-\pi}{n^2}\sec^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{p^2}{4\pi \sec^2\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \frac{p^2}{4\pi}. \end{aligned}$$

□

4. A Desigualdade Isoperimétrica

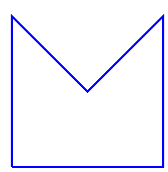
A fim de estabelecer a Desigualdade Isoperimétrica em sua forma mais geral, é necessário introduzir duas definições preliminares.

Definição 1. Um subconjunto X de $\mathbb{R}^2$ é *convexo* se, dados dois pontos distintos quaisquer de X, o segmento que os une está completamente contido em X.

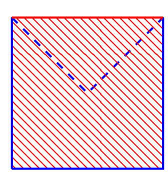
Definição 2. Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}^2$. A *envoltória convexa* de X, denotada por $co(X)$, é definida como sendo o menor subconjunto convexo de $\mathbb{R}^2$ que contém X.

Observação: Note que um polígono é convexo se for a fronteira de sua envoltória convexa.

Exemplo 1. Para ilustrar a definição precedente, considere o conjunto X como sendo a seguinte figura no plano:



Isso posto, para determinar sua envoltória convexa $co(X)$, basta "fechar o quadrado" e "pintá-lo":



Finalmente o resultado principal pode ser apresentado com sua devida demonstração, de modo a concluir o estudo aqui proposto.

Teorema 4. *(Desigualdade Isoperimétrica)* Toda curva fechada de comprimento finito l no plano engloba uma região com área menor do que ou igual a $\frac{l^2}{4\pi}$. Além disso, esse valor só é alcançado para a circunferência de raio $\frac{l}{2\pi}$.

Prova. Seja C uma curva fechada de comprimento l, englobando uma região com área S. Fixe um número natural $n \geq 3$ e tome n pontos $Y_1, \ldots, Y_n$ sobre C, igualmente espaçados com relação ao comprimento do arco de curva entre eles. Trace segmentos de retas ligando esses pontos, de modo a obter um polígono P de n lados e perímetro menor do que l.

Considere a envoltória convexa, $co(P)$, desse polígono, com área A, a qual tem perímetro $p < l$ e número de lados $m \leq n$. Seja P' o polígono determinado pela fronteira de $co(P)$. Pela Proposição 5, há um polígono regular P'' com número de lados $\tilde{m} \leq m$, perímetro $\tilde{p} \leq p$ e área $\tilde{A} \geq A$. Além disso, pelo Teorema 3, a circunferência de perímetro $\tilde{p}$ possui área $B \geq \tilde{A}$, sendo $B = \frac{\tilde{p}^2}{4\pi}$.

Em resumo, vale que $A \leq \frac{l^2}{4\pi}$. Seja agora X o conjunto dos pontos que ou pertencem a essa envoltória, ou, estando fora dela, distam no máximo $\frac{l}{2n}$ de algum destes n pontos:

$$X := co(P) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{n} B \left[Y_i, \frac{l}{2n} \right] \right).$$

Dessa forma, a área de X é menor ou igual a $A + n\pi \left(\frac{l}{2n} \right)^2$. Ademais, a curva C está inteiramente contida em X, pois qualquer ponto de C dista menos do que $\frac{2l}{n}$ de algum Y_i.

Logo:

$$S \leq A + n\pi \left(\frac{l}{2n} \right)^2 \leq \frac{l^2}{4\pi} + \frac{\pi l^2}{4n}.$$

Como n é arbitrário, segue que $S \leq \frac{l^2}{4\pi}$.

Por fim, considere um curva fechada D de comprimento l englobando uma região com área $\frac{l^2}{4\pi}$. Deve-se provar que essa curva é uma circunferência.

Inicialmente, observe que D é convexa. De fato, se não o fosse, haveria um segmento de reta ligando dois pontos dessa curva, o qual estaria inteiramente contido em seu exterior. Esse segmento separaria o exterior da curva em duas partes, uma limitada e outra não. Tomando a porção da curva que toca a parte ilimitada, juntamente com o segmento de reta, seria obtida uma nova curva, com perímetro menor e área maior do que a primeira. Isso, por sua vez, contradiria a primeira parte já demonstrada desse teorema.

Suponha agora que essa curva fechada e convexa não seja uma circunferência. Desse modo, é possível tomar quatro pontos sobre D, de tal forma que o quadrilátero determinado por eles não é inscritível. Para cada dois vértices consecutivos do quadrilátero, considere a figura formada pela porção de D que os liga, juntamente com o segmento de reta. Fazendo isso para todos os lados do quadrilátero, são obtidas quatro figuras. É possível reorganizar essas figuras, ainda ligando os mesmos segmentos de reta, de modo a obter um novo quadrilátero inscritível (Figura 7). Com isso, é construída uma nova curva, com mesmo perímetro e área maior (pois a curva original é convexa), contradizendo novamente a primeira parte já demonstrada.

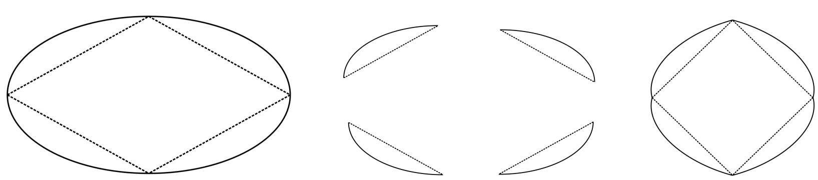


Figura 7: *Reorganizando as figuras para obter um quadrilátero inscritível.*

□

5. Conclusão

O presente artigo estuda um problema existente desde a Grécia Antiga: a Desigualdade Isoperimétrica. Com base em uma abordagem geométrica, são apresentados conceitos e resultados auxiliares, os quais dizem respeito a propriedades de figuras planas, como polígonos e curvas. Estes resultados estudam desde áreas de triângulos e equiláteros, até uma comparação entre polígonos regulares com mesmo perímetro e número de lados distinto.

Com todo o ferramental assim adquirido, é então enunciado e demonstrado o resultado final. Esse afirma que, dentre todas as curvas planas fechadas, com um dado comprimento finito, a circunferência engloba maior área. Apesar de ser intuitivo, tal resultado demorou a ser demonstrado pela primeira vez, o que veio a ocorrer apenas em 1870.

Referências

[1] LIMBERGER, Roberto. **Abordagens do Problema Isoperimétrico.** 2011. 86 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, Campinas, 2011.

[2] MOREIRA, Carlos Gustavo T. de A.; SALDANHA, Nicolau Corção. A desigualdade isoperimétrica. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, n. 15, p. 13-19, dez. 1993.