Dois amigos jogam um jogo (e sem querer mostram um resultado importante sobre conjuntos infinitos)

Luisa Gomes Seixas *
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (ICMC-USP)
lgseixas@usp.br

Resumo

Dois amigos se alternam escolhendo pontos na reta real em um jogo infinito chamado Jogo de Baker. Analisando possíveis estratégias para ambos os jogadores, mostraremos de uma forma pouco convencional que todo subconjunto dos reais que contém um conjunto perfeito e não vazio é não enumerável.

1. Como funciona esse jogo?

O Jogo de Baker funciona da seguinte forma: Fixado um subconjunto X dos reais, teremos dois jogadores, que chamaremos de Alice e Beto. Na primeira rodada, Alice escolhe um número, e Beto deve escolher um número maior do que o escolhido por Alice. Na segunda rodada, Alice deve escolher um número maior do que o seu escolhido da primeira rodada e menor do que o escolhido por seu oponente. Beto então deve escolher um número maior do que o último escolhido por Alice, e menor do que o último escolhido por ele próprio, e assim sucessivamente.

Formalmente, temos que, na rodada 0, Alice começa jogando $a_0 \in \mathbb{R}$ e Beto escolhe $b_0 \in \mathbb{R}$ com $b_0 > a_0$. Na rodada 1, Alice escolhe $a_1 \in \mathbb{R}$ tal que $a_0 < a_1 < b_0$ e Beto escolhe $b_1 \in \mathbb{R}$ com $a_1 < b_1 < b_0$, e assim por diante, de forma que na rodada n:

1. Alice joga $a_n \in \mathbb{R}$ de forma que $a_{n-1} < a_n < b_{n-1}$;
2. Beto joga $b_n \in \mathbb{R}$ de forma que $a_n < b_n < b_{n-1}$.

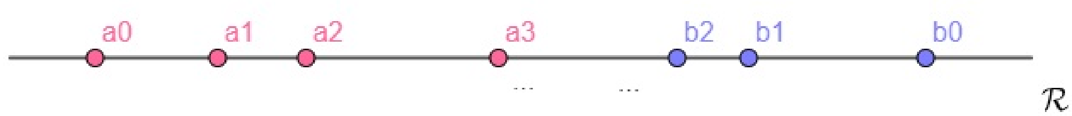

Figura 1: *Um exemplo*

Assim, o jogo possui infinitas rodadas, e Alice vence se a sequência de pontos que escolheu converge para um elemento do conjunto X. Beto ganha caso contrário.

*Esse trabalho foi feito com o apoio da FAPESP (2021/02803-0).

Antes de seguirmos em frente, devemos garantir que o jogo está bem definido, ou seja, precisamos mostrar que a sequência dos números escolhidos por Alice de fato converge para um número real. Para isso, são necessárias algumas definições:

Definição 1.1 *Uma sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é dita monótona quando é de um dos seguintes tipos:*

- *Não-decrescente, ou seja,* $x_n \leq x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*;*
- *Não-crescente, ou seja,* $x_n \geq x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Definição 1.2 *Uma sequência é dita limitada quando existem* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que para todo* x *elemento dessa sequência temos* $a \leq x \leq b$*.*

Com essas definições em mãos, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 1.1 *Toda sequência monótona e limitada é convergente, como enunciado e demonstrado em [3].*

Note que a sequência dos números de Alice é estritamente crescente e, portanto, monótona. Além disso, todos os números são maiores ou iguais a a_0 e menores que b_0, o que faz com que a sequência seja limitada. Assim, a sequência necessariamente converge.

Agora que já vimos que Alice e Beto podem de fato jogar esse jogo, vamos analisar algumas estratégias que podem ser usadas pelos dois.

2. Como Beto ganha?

Primeiro, precisaremos de uma definição:

Definição 2.1 *Um conjunto infinito* X *é dito enumerável se existe uma função sobrejetora de* $\mathbb{N}$ *em* X*. Note que, se* X *é enumerável, ele pode ser escrito na forma* $X = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$*.*

Um dos casos em que Beto tem estratégia vencedora é quando X é enumerável. Seja $X = \{x_0, x_1, x_2, ...\}$. Na rodada n, Beto garante que a sequência de Alice não converge para x_n da seguinte maneira: na rodada 0, se Alice escolhe $a_0 < x_0$, Beto deve escolher x_0, para impedir que a sequência de Alice possa convergir para esse número. Caso contrário, ou seja, se $x_0 \leq a_0$, Alice já não pode convergir para x_0, então Beto pode escolher um número qualquer entre os possíveis. Generalizando, na rodada n, se $a_n < x_n$, Beto deve escolher x_n, garantindo que Alice não pode convergir para esse número. Caso contrário, se $a_n \geq x_n$, Beto pode escolher qualquer número entre os disponíveis (ou seja, qualquer número entre a_n e b_{n-1}) pois Alice já não pode convergir para x_n. Portanto, Beto garante que a sequência dos números de Alice não pode convergir para nenhum elemento de X.

Com esse resultado, fica fácil ver que $\mathbb{R}$ é não enumerável. Como vimos anteriormente, para $X = \mathbb{R}$, Alice sempre ganha, pois o conjunto dos números escolhidos por Alice sempre converge para um número real. Ou seja, para $X = \mathbb{R}$, Alice tem estratégia vencedora. Mas se $\mathbb{R}$ fosse enumerável, Beto também teria estratégia vencedora, o que seria uma contradição. Logo, $\mathbb{R}$ é não enumerável.

3. Algumas definições e resultados que precisamos

Para compreendermos a próxima seção, precisamos conhecer algumas definições importantes:

Definição 3.1 *Ponto de acumulação: x é dito ponto de acumulação de $A \subset \mathbb{R}$ se existe uma sequência não constante de elementos de $A \backslash \{x\}$ que converge para x.*

Definição 3.2 *Conjunto aberto: Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito aberto se para todo $a \in A$ existe $\mathcal{E} > 0$ tal que $]a - \mathcal{E}, a + \mathcal{E}[\subset A$.*

Definição 3.3 *Conjunto fechado: Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é dito fechado se seu complementar é aberto.*

Definição 3.4 *Conjunto perfeito: Um subconjunto $P \subset \mathbb{R}$ é dito perfeito se é fechado e todo ponto seu é ponto de acumulação de P.*

Além disso, há dois resultados importantes que usaremos posteriormente:

Proposição 3.1 *Seja X um conjunto fechado. Todas as sequências convergentes de elementos de X convergem para um elemento do próprio X.*

Podemos ver isso da seguinte forma: dada uma sequência convergente em X, seja x seu limite. Se $x \notin X$, $x \in \mathbb{R} \backslash X$, que é um conjunto aberto, uma vez que X é fechado. Se x está em um conjunto aberto, existe $\mathcal{E} > 0$ tal que $]x + \mathcal{E}, x - \mathcal{E}[\cap X = \emptyset$. Logo, a sequência não pode convergir para x, o que é um absurdo. Portanto, $x \in X$.

Proposição 3.2 *Seja F fechado e $A \subset F$. Se $x = inf A$, então $x \in F$.*

Claro pois, se $x \notin F$, x está no complemetar de F, que é um conjunto aberto. Mas então existiria $\varepsilon > 0$ tal que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon$ [está nesse aberto. Porém, isso implica que qualquer $y \in [x, x + \epsilon[$ é tal que $y \notin F$ e, consequentemente, $y \notin A$, o que contradiz o fato de x ser o ínfimo de A.

4. Como Alice ganha?

Com isso, vamos analisar um dos casos em que Alice tem estratégia vencedora. Seja X perfeito e não vazio. Vamos mostrar que:

1. Existe $a \in \mathbb{R}$ ponto de acumulação de $[a, +\infty[\cap X$. Ou seja, existe um ponto de acumulação à direita. Isso quer dizer que existe uma sequência não eventualmente constante de elementos de X que converge para a por valores maiores que a (a definição de ponto de acumulação à esquerda é análoga).

   Seja $x \in X$ tal que x não é máximo. Se x é ponto de acumulação à direita de X, a condição está satisfeita. Caso contrário, seja z o ínfimo de $\{y \in X : x < y\}$, cuja existência é garantida por x não ser máximo de X. Note que $z \neq x$, pois x não é ponto de acumulação à direita. Além disso, temos que $z \in X$, por ser ínfimo de uma sequência de elementos de X, que é fechado. Perceba que $]x, z[\cap X = \emptyset$ pela forma que definimos z: se houvesse um elemento de X nesse intervalo, z não seria o ínfimo de $\{y \in X : x < y\}$. Sabemos que z é ponto de acumulação, pois X é perfeito, mas ele não pode ser à esquerda, pois $]x, z[\cap X = \emptyset$. Logo, z é ponto de acumulaçao pela direita.

   Note que o ponto de acumulação à direita que encontramos é sempre um elemento de X.

2. Supondo que $a \in X$ é tal que a é ponto de acumulação de $[a, +\infty[\cap X$, dado $\varepsilon > 0$, existe $b \in]a, a + \varepsilon[\cap X$ tal que b é ponto de acumulação de $[b, +\infty[\cap X$.

   De fato, seja $b \in]a, a + \varepsilon[\cap X$ tal que b não é máximo. Se b é ponto de acumulação à direita de X, a condição está satisfeita. Caso contrário, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $b < y < a + \varepsilon$ e $]b, y[\cap X = \emptyset$. Seja z o ínfimo de $\{y \in X : b < y < a + \varepsilon\}$. De maneira análoga ao que foi feito na demonstração anterior, temos que z é ponto de acumulação à direita de X.

3. Alice consegue jogar uma sequência feita só de pontos de X: Se a primeira jogada de Alice é um ponto $a \in X$ que acumula pela direita, temos que, para todo $\varepsilon > 0$, Alice pode escolher um número em $]a, a + \varepsilon[\cap X$ que acumula pela direita. Como o número escolhido por Beto tem a forma $a + \varepsilon$, Alice pode escolher como segundo número um ponto de X que acumula pela direita, o que permite que ela repita o processo nas jogadas seguintes.

Mostramos então que, para X perfeito e não vazio, Alice consegue jogar uma sequência somente de elementos de X. Mas toda sequência convergente de elementos de um conjunto fechado converge para um elemento do próprio conjunto. Como X é fechado, o limite da sequência pertence a X. Então, para X perfeito e não vazio, Alice tem estratégia vencedora.

Mais do que isso, se existe $P \subset X$ tal que P é perfeito e não vazio, então Alice pode escolher um elemento de P e usar a estratégia anterior para fazer a sequência convergir para um elemento de P. Como $P \subset X$, Alice tem estratégia vencedora.

5. E daí?

Vimos que, se X contém um conjunto P perfeito e não vazio, então Alice tem estratégia vencedora. Mas sabemos também que, se X é enumerável, Beto tem estratégia vencedora. Logo, X não pode conter um conjunto perfeito e não vazio e ser enumerável, pois isso implicaria em uma contradição quanto a quem tem a estratégia vencedora. Portanto, com o Jogo de Baker, conseguimos mostrar que se $X \subset \mathbb{R}$ contém um conjunto P perfeito e não vazio, então X é não enumerável.

A autora agradece aos revisores pela leitura cuidadosa e pelas sugestões

Referências

[1] L.F. Aurichi. Topologia e conjuntos em exercícios: Jogo de Baker. *https://sites.icmc.usp.br/aurichi/exerc/doku.php?id=lista:baker*.

[2] M. H. Baker. Uncontable sets and an infinite real number game. *Mathematics Magazine*, 80:377–380.

[3] M. Handler and M. ALVES. O teorema da convergência monótona para sequências numéricas com aplicações. Anais do SIGMAT - Simpósio Integrado de Matemática, 2018. *https://siseve.apps.uepg.br/storage/sigmat/3_MATHEUS_TABAJARA_SAMPAIO_HANDLER-153920278934898.pdf*.