Como contei aos meus amigos que estudo Topologia

Renan M. Mezabarba*

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo
rmmezabarba@gmail.com

Resumo

Como o título sugere, veremos a história de como revelei a alguns amigos o perturbador fato de que estudo Topologia Geral. Embora baseada em acontecimentos verdadeiros, a atual narrativa foi levemente dramatizada. Os nomes dos sujeitos envolvidos, obviamente, serão preservados.

1. Introdução

No pensionato em que moro em São Carlos, desde 2012, tive a oportunidade de conviver com vários estudantes de Exatas ao longo dos anos, principalmente calouros de Engenharia. Eventualmente, entre partidas de LoL ou reclamações sobre cortes de Dedekind em Cálculo[1], algum calouro olhava para o canto mais sombrio da sala de estudos, observava uma criatura solitária em meio a rabiscos ilegíveis[2], e tinha a “feliz” ideia de perguntar a essa pessoa:

O que você estuda?

Foram várias as vezes que respondi a tal questionamento evasivamente, com coisas como “Topologia: é tipo geometria, só que maleável como uma borracha e mais abstrato”, ou analogias piores. Porém, em 2015, dois desses calouros, um da Matemática[3] e outro da Física[4], ignoraram o meu visível desconforto e insistiram:

Como assim?

O problema em responder esse tipo de coisa não está na minha introversão intrínseca, mas sim no caráter abstrato do assunto. Dizer que estudo conjuntos munidos de um certo tipo de estrutura e funções entre esses conjuntos que preservam tais estruturas seria uma resposta razoável, e que serviria para quase qualquer área da Matemática, mas ainda assim, inútil: eles sairiam sem entender, ou pior, perguntariam de novo!

Por isso, tentei elaborar um exemplo suficientemente palpável para servir como espinha dorsal da resposta. Neste artigo, apresento tal explicação e busco estender as considerações topológicas um pouco mais a fundo.

*O presente artigo é uma diagonal do texto que preparei para um minicurso que nunca foi apresentado. Agradeço as sugestões da Pryscilla Silva, da Prof. Marina Andretta e d@s parecerista :)

[1] Com razão? Reservo-me ao direito de não opinar.

[2] Sou eu.

[3] Não foi o Eduardo, a.k.a. o Eduardo.

[4] Não foi o Henrique, a.k.a. Astrólogo.

2. O Problema

Considere o intervalo semi-aberto $[0, 1)$ da reta real. Imaginando-se munido de uma folha de papel infinita, é possível desenhar o gráfico de uma função $f : [0, 1) \to \mathbb{R}$ sem tirar o lápis do papel, de modo que esse gráfico seja ilimitado? Um esboço da resposta afirmativa se dá na próxima figura.

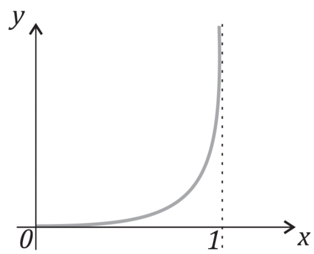

Figura 1: *Um esboço assintótico*

Considere então o mesmo problema, mas em vez de $[0, 1)$ tome o intervalo fechado $[0, 1]$. Convidamos o leitor a imaginar como seria possível desenhar tal gráfico, mas adiantamos que a resposta é negativa.

Enquanto alguém tenta provar essa impossibilidade particular, podemos aumentar a *dimensão* do problema, trocando $[0, 1]$ por $[0, 1] \times [0, 1]$, "lápis" por "lençol", e exigindo que o gráfico de $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$, i.e., o lençol, não tenha um furo. Se f for positiva, por exemplo, então seu gráfico se assemelha (em algum sentido) a este simpático fantasma cego.

Figura 2: *Fantasmas cegos podem ter altura infinita?*

Em tal contexto, a pergunta se torna: fantasmas cegos podem ter altura infinita? A resposta continua negativa, e agora alguém tem duas proposições para demonstrar. Podemos fazer diversas variações desse problema, aumentando cada vez mais as instâncias negativas a serem provadas. Mas é somente um *fato topológico* o responsável por todos esses fenômenos: a *compacidade*, seja lá o que isso signifique.

3. A topologia, com "t" minúsculo

Na seção anterior, enunciamos o problema de modo bastante informal. O leitor já familiarizado com Cálculo sabe como formalizar a expressão "desenhar o gráfico de f sem tirar o lápis do papel", mas vamos pensar no caso extremo, do leitor que ainda não se deparou com tais rigores.

Considere novamente o caso de uma função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Independentemente de termos o gráfico *global* de f, para dizer se o lápis foi tirado ou não do papel precisamos olhar *localmente*.

Para saber se o lápis foi tirado do papel, digamos, no ponto $p \in [0,1]$, estudamos o comportamento de f nos arredores de p e $f(p)$, em busca do seguinte fenômeno: se para algum *lugar V próximo* de $f(p)$ sempre for possível achar pontos próximos de p tais que a f os mande para fora de V, então o lápis foi tirado do papel. Em tal situação, profissionais dizem que a função é *descontínua em p*, como na imagem abaixo.

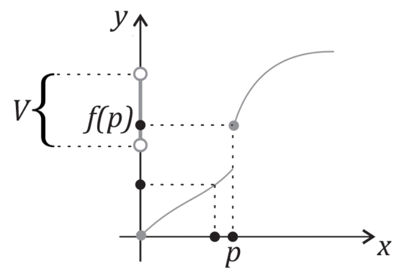

Figura 3: *Esboço de descontinuidade*

Assim, dizer que não tiramos o lápis do papel em p consiste em negar a situação anterior: ou seja, para todo *lugar V próximo* de $f(p)$, há um lugar U próximo de p tal que f manda os pontos de U para V. Profissionais se referem a tal fenômeno dizendo que f é *contínua* em p – se f é contínua em todos os pontos de seu domínio, dizemos simplesmente que f é *contínua*.

É claro que precisamos definir o que significa dizer que V é um *lugar próximo de p* ou, digamos, *vizinhança de p*. Seja qual for o significado disso, a intuição é que quanto mais vizinhanças em comum dois pontos p e q possuam, mais próximos entre si eles estão: duas pessoas *distintas* morando na mesma casa compartilham como *vizinhanças comuns* a própria casa, o bairro, a cidade e assim por diante, mas possivelmente, seus quartos sejam distintos – em último caso[5], pelo menos os seus próprios corpos são distintos.

Assim, espero que o leitor acredite na razoabilidade das seguintes exigências:

- se U e V são vizinhanças, então a parte comum entre elas também é;
- união de vizinhanças é vizinhança;
- o “todo”e o “nada” são vizinhanças.

Formalmente, dizemos que $\mathcal{T}$ é uma topologia sobre um conjunto X se $\mathcal{T}$ for uma família de subconjuntos de X satisfazendo as condições acima, ou seja:

- se $U, V \in \mathcal{T}$, então $U \cap V \in \mathcal{T}$;
- se $U_i \in \mathcal{T}$ para todo i pertencente a algum conjunto I, então $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$;
- $X, \emptyset \in \mathcal{T}$.

São justamente os elemento de $\mathcal{T}$ que chamamos de *vizinhanças*, ou muito comumente, conjuntos *abertos* de X (segundo a topologia $\mathcal{T}$), ao passo que $(X, \mathcal{T})$ é um *espaço topológico*, ou simplesmente X é um espaço topológico – quando $\mathcal{T}$ é clara pelo contexto. Naturalmente, se $(X, \mathcal{T})$ é um espaço topológico e $X' \subset X$, então X' também admite uma topologia, induzida de $(X, \mathcal{T})$, a saber: $\mathcal{T}' := \{X' \cap A : A \in \mathcal{T}\}$.

[5]A menos de irmãos siameses. Em terminologia topológica, talvez isso signifique que o espaço das pessoas não é T_1.

Para o leitor desconfiado desse salto de abstração, daremos um

Exemplo. Para $X = \mathbb{R}$, considere os conjuntos $A \subset \mathbb{R}$ tais que para todo $a \in A$ exista $r > 0$ satisfazendo $(a - r, a + r) \subset A$. Então, a família de todos os subconjuntos $A \subset \mathbb{R}$ com tal propriedade constitui uma topologia em X. Em particular, note que $\emptyset$ é aberto (caso contrário, existiria um ponto no vazio atestando o contrário!). Além disso, o subconjunto $X' = [0, 1]$ admite uma topologia induzida da topologia de $\mathbb{R}$. Convidamos o leitor a verificar tais afirmações.

4. Continuidade sem papel

Agora que temos a noção de vizinhanças devidamente definidas – são os elementos da topologia –, podemos voltar ao problema anterior e considerar funções contínuas honestamente. Já sabemos como caracterizar a continuidade de f num ponto p: essencialmente, pegamos uma lupa e procuramos por "saltos". Mas nem sempre temos paciência para usar uma lupa ou fazer medições tão precisas. Por sorte, tais verificações podem ser feitas de um modo um pouco mais *displicente* e, por isso mesmo, mais prático.

Para entendermos isso, seja $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ a sua função contínua (em todos os pontos!) favorita. Na figura abaixo, podemos ver a minha função contínua favorita.

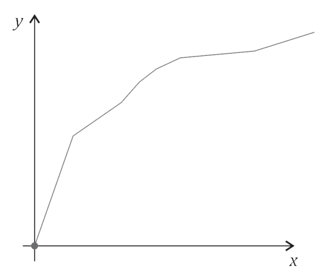

Figura 4: *Minha função contínua favorita*

Agora, para um conjunto aberto $V \subset \mathbb{R}$, vamos observar o subconjunto $f^{-1}[V]$, i.e., a família de todos os pontos x do domínio de f tais que $f(x) \in V$. Podemos imaginar que V é um intervalo aberto, como na figura.

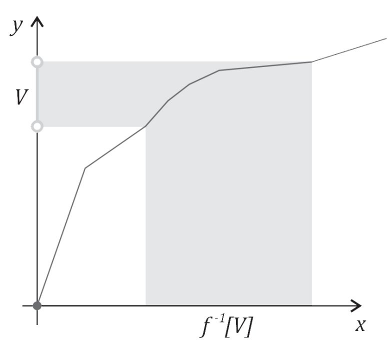

Figura 5: *A pré-imagem de um aberto V pela minha função contínua favorita*

Agora, para um ponto $p \in f^{-1}[V]$ qualquer, temos necessariamente $f(p) \in V$, pela própria definição da pré-imagem. Como f é contínua em todos os pontos de seu domínio, segue que f é contínua em p, e assim existe um conjunto aberto $U_p \subset [0,1]$ tal que $f(x) \in V$ para todo $x \in U_p$. Em outras palavras, esse aberto U_p está contido em $f^{-1}[V]$, como na próxima imagem.

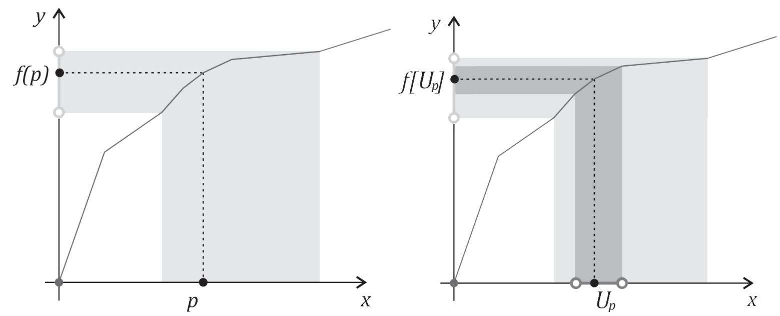

Figura 6: *Na pré-imagem de aberto sempre cabe mais um*

Finalmente, como o ponto $p \in f^{-1}[V]$ foi escolhido arbitrariamente, resulta que todo ponto de $f^{-1}[V]$ está contido dentro de um aberto de $[0,1]$, o qual está contido dentro do próprio $f^{-1}[V]$. Em outras palavras, $f^{-1}[V]$ é a reunião dos abertos da forma U_p. Daí, como a reunião de conjuntos abertos é aberta, resulta que o próprio $f^{-1}[V]$ é um aberto de $[0,1]$.

Por outro lado, se uma função $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ for tal que $g^{-1}[V]$ é um aberto de $[0,1]$ sempre que $V \subset \mathbb{R}$ for aberto de $\mathbb{R}$, então é claro que g será contínua em todos os pontos de $[0,1]$. Convidamos o leitor a justificar essa última afirmação.

Com um pouco mais de atenção, podemos notar que nas argumentações acima não usamos quaisquer características particulares da reta ou de $[0,1]$. De fato, a discussão acima é válida para espaços topológicos quaisquer e, essencialmente, é a demonstração da seguinte

Proposição. Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{V})$ espaços topológicos e $f\colon X \to Y$ uma função. Então f é contínua se, e somente se, $f^{-1}[V] \in \mathcal{T}$ para todo $V \in \mathcal{V}$.

Observação. O que acontece se a pré-imagem de um aberto for vazia? Volte duas páginas e releia a definição de topologia!

Exemplo. Note que no esboço da Figura 3, a pré-imagem de V é um intervalo da forma $[p, a) \subset \mathbb{R}$, que não é aberto em $[0,1]$.

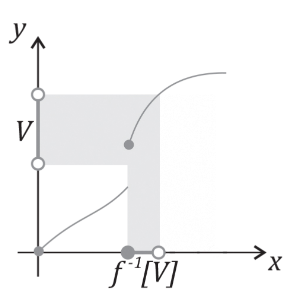

Figura 7: *Esboço de descontinuidade, sob o sol*

5. Compacidade

Definamos por fim a tão esperada *compacidade*. Sem rodeios: um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é *compacto* se toda coleção de abertos que cobre o espaço admite uma subcoleção finita que ainda cobre o espaço, i.e., se uma certa coleção $\{U_i : i \in I\}$ de abertos de X é tal que para todo $x \in X$ existe algum $i \in I$ com $x \in U_i$, então existem $i_0, \ldots, i_n \in I$ para algum $n \in \mathbb{N}$ tais que $X = U_{i_0} \cup \ldots \cup U_{i_n}$.

Em algum sentido, a compacidade nos dá comportamentos muitas vezes análogos aos de conjuntos finitos. Não é coincidência que qualquer topologia $\mathcal{T}$ sobre um conjunto finito X torne $(X, \mathcal{T})$ um espaço compacto. De fato, a própria noção de finitude, aparentemente atômica, se quebra como junção de duas propriedades topológicas!

Pausa dramática para uma história sobre finitude

Imagine-se observando um mundo no qual todos os objetos têm cores em variações de cinza, exceto esferas e cubos: todas as esferas têm cor azul e, reciprocamente, qualquer coisa com cor azul é uma esfera, ao passo que cubos são vermelhos, e qualquer coisa vermelha é um cubo. Não surpreende, portanto, que os habitantes desse mundo peculiar nunca tenham inventado palavras distintas para designar os conceito de "esfera", "azul", "cubo" e "vermelho": uma palavra que represente "esfera" automaticamente traduz o conceito "azul", por exemplo.

Por não se conter em meramente observar, você tem a feliz ideia de deixar um presente para os habitantes: uma esfera vermelha e um cubo azul! Deixamos a cargo do leitor imaginar o caos filosófico que isso criaria entre os habitantes desse planeta hipotético.

Essa anedota, adaptada de uma conversa que tive com o Prof. Carlos Grossi[6] em 2015, ajuda a ilustrar a estranheza natural de alguém ao perceber que a noção de finitude funciona como as *esferas azuis* citadas acima. De fato, embora a princípio a finitude possa parecer um conceito atômico, ela se expressa como interseção de duas propriedades topológicas: a compacidade e a *discretude*, onde dizemos que um espaço topológico $(X, \mathcal{T})$ é *discreto* se para todo ponto x de X valer que $\{x\}$ é aberto – profissionais chamam *pontos abertos* de pontos *isolados*.

Deixamos então para o leitor a tarefa de observar que um conjunto X é finito se, e somente se, existe uma topologia $\mathcal{T}$ em X que torna $(X, \mathcal{T})$ um espaço topológico compacto e discreto.

De volta ao assunto

A discussão acima mostra que a compacidade captura parte da essência do que significa ser finito. Daí, como a imagem de um conjunto finito por qualquer função sempre é um conjunto finito, o leitor não deve se surpreender com a próxima

Proposição. Sejam $(X, \mathcal{T})$ e $(Y, \mathcal{V})$ espaços topológicos. Se $f\colon X \to Y$ é contínua, sobrejetora e $(X, \mathcal{T})$ é compacto, então $(Y, \mathcal{V})$ é compacto.

Demonstração. Precisamos tomar uma cobertura por abertos de Y e obter uma subcobertura finita. Fazemos isso em quatro passos.

1. Tomamos $\{V_i : i \in I\}$ uma cobertura de abertos de Y.
2. Usamos o fato da função ser contínua para induzir uma cobertura por abertos em X: como f é contínua e V_i é um aberto de Y para todo i, segue que $f^{-1}[V_i]$ é um aberto de X e, por isso, $\{f^{-1}[V_i] : i \in I\}$ é uma coleção de abertos de X, e é fácil ver que tal coleção cobre X.

[6] Um provável eco dos materiais presentes em [Yuan] e [Smullyan].

3. Por $(X, \mathcal{T})$ ser compacto, existem $i_0, \ldots, i_n \in I$ tais que $X = f^{-1}[V_{i_0}] \cup \ldots \cup f^{-1}[V_{i_n}]$.
4. Finalmente, note que $Y = V_{i_0} \cup \ldots \cup V_{i_n}$: dado $y \in Y$, a sobrejetividade de f nos dá $x \in X$ com $f(x) = y$, donde segue que existe $j \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $x \in f^{-1}[V_{i_j}]$, e daí $y \in V_{i_j}$. •

A proposição acima é a justificativa absoluta para não podermos traçar os gráficos propostos na seção anterior.

Por um lado, os domínios lá considerados, $[0,1]$ e $[0,1] \times [0,1]$, são espaços compactos quando vistos com suas topologias naturais induzidas de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$, respectivamente[7]. Logo, suas imagens por funções contínuas, i.e., aquelas cujo lápis não foi tirado do papel ou cujo lençol não foi furado, são necessariamente compactas em $\mathbb{R}$.

Por outro lado, temos o seguinte

Lema. Se $K \subset \mathbb{R}$ é compacto com a topologia induzida de $\mathbb{R}$, então K é limitado.

Demonstração. Os intervalos abertos da forma $(-n, n)$, para $n \in \mathbb{N}$, formam uma cobertura de abertos para $\mathbb{R}$ e, por conseguinte, para K. A compacidade de K então implica que existe $n \in \mathbb{N}$ com $K \subset (-n, n)$. •

6. Topologia, com "T" maiúsculo

Assim, respondendo a pergunta inicial, eu estudo Topologia, a área da Matemática Pura interessada na análise das propriedades de espaços topológicos e como estas se comportam sob a ação de funções contínuas, entre outras coisas.

Tais propriedades surgem naturalmente em diversos problemas corriqueiros e úteis do dia-a-dia, como traçar gráficos de funções ou idealizar fantasmas cegos. Mas ela também está presente em situações menos interessantes, como noções de convergência em Análise, assombrando ideais primos em Álgebra, ou ao até quando queremos escolher meias.

Em suma, o *zoom out* dado pela Topologia (e pela Matemática Pura, de modo geral) permite, muitas vezes, limpar os problemas de informações desnecessárias, tornando a busca por respostas mais precisa. Em outras palavras, a (aparente?) obsessão por generalidade dos matemáticos não se traduz necessariamente na máxima "matar uma formiga com um canhão", mas talvez ela se assemelhe a algo mais elegante, como "usar laser em vez de um serrote".

Referências

[Aurichi] Aurichi, L. F. (2017). Notas de Aula. *disponível em* `http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/aurichi/lib/exe/fetch.php?media=curso:topologia2017.pdf`.

[Smullyan] Smullyan, R. (1983). Five Thousand B.C. and Other Philosophical Fantasies.

[Yuan] Yuan, Q. (2013). What should be the intuition when working with compactness? *disponível em* `https://math.stackexchange.com/a/371949`.

[7] Isso não é necessariamente imediato. Com algumas propriedades particulares da reta prova-se que $[0,1]$ é compacto, enquanto a compacidade do produto $[0,1] \times [0,1]$ é uma instância bastante particular do chamado Teorema de Tychonoff. Contudo, a demonstração de tais resultados foge ao escopo deliberadamente vago deste artigo. O leitor interessado pode consultar qualquer material *razoável* de Topologia Geral, o que exclui o livro do Munkres, na minha opinião :p. Embora possa soar suspeito, sugiro as notas de aula do Prof. Leandro [Aurichi].