

# Fractais: figuras de outra dimensão - Parte I

CAIO HENRIQUE SILVA DE SOUZA

caiohsouza36@gmail.com

GABRIEL LONGATTO CLEMENTE

clemente@dm.ufscar.br

Universidade Federal de São Carlos

---

## Resumo

*Na primeira parte deste trabalho, explicaremos detalhadamente as noções de algoritmo e de limite algorítmico. Depois disso, apresentaremos as figuras fractais mais importantes de toda História da Matemática. Estas são o Conjunto de Cantor, a Curva de Koch, o Floco de Neve de Koch, o Triângulo de Sierpinski e o Quadrado de Sierpinski.*

---

## 1. INTRODUÇÃO

No *Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa Michaelis* podemos encontrar as seguintes definições para a palavra **algoritmo**<sup>1</sup>:

1. Processo de cálculo que, por meio de uma sequência finita de regras, raciocínios e operações, aplicada a um número finito de dados, leva à resolução de grupos análogos de problemas.
2. Operação ou processo de cálculo; sequência de etapas articuladas que produz a solução de um problema; procedimento sequenciado que leva ao cumprimento de uma tarefa.
3. Conjunto das regras de operação cuja aplicação permite a resolução de um problema enunciado por meio de um número finito de operações; pode ser traduzido em um programa executado por um computador, detectável nos mecanismos gramaticais de uma língua ou no sistema de procedimentos racionais finito, utilizado em outras ciências, para resolução de problemas semelhantes.
4. Conjunto de etapas ou passos ou instruções ou procedimentos, bem definidos e ordenados, usados na solução de um problema, ou de uma classe de problemas, em um número finito de regras.

---

<sup>1</sup>Texto adaptado.

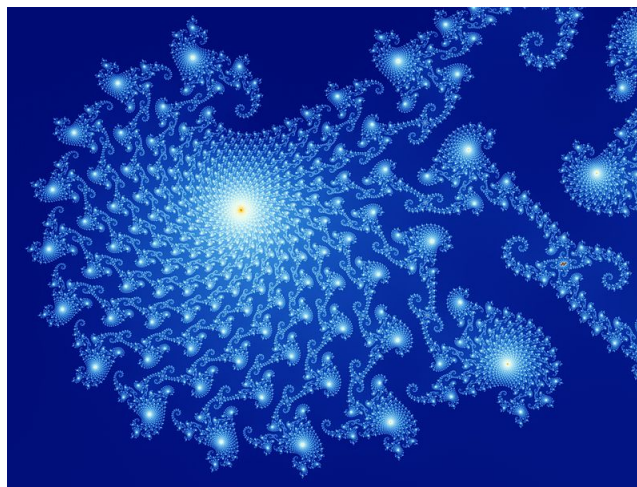
Todas as definições apresentadas acima apontam na mesma direção. Escolhemos a última delas como sendo nossa definição oficial. Isto porque ela sintetiza a ideia que queremos transmitir, em linguagem pouco técnica, e contempla os diferentes tipos de tarefas que exploraremos. Vejamos um exemplo prático e cotidiano dessa noção a fim de mantermos as ideias claras. Consideremos então o problema abaixo. Depois disso, recomendamos o estudo empírico do algoritmo apresentado, que é uma das soluções possíveis para essa situação.

**Problema.** Sobre uma mesa temos um filtro abastecido com água potável e um copo plástico. Descreva uma sequência ordenada de passos para que um indivíduo beba água fazendo uso desses dois objetos.

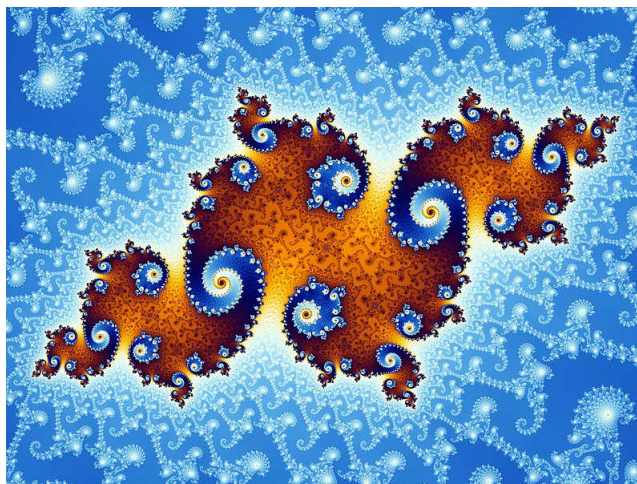
**Algoritmo.** (Para beber água).

- **Etapa 1.** Abra a mão. Ou seja, posicione os dedos completamente esticados formando um ângulo raso com a palma da mão.
- **Etapa 2.** Aproxime a mão aberta do copo de modo que a palma fique em contato com a lateral deste, que os dedos estejam paralelos à superfície da mesa e que, também, seu polegar esteja acima do dedo mínimo, fazendo uma ângulo reto com o dedo indicador.
- **Etapa 3.** Feche a mão apertando o copo até que este esteja seguro, porém, sem quebrar o mesmo.
- **Etapa 4.** Leve o copo até embaixo da torneira do filtro de modo que o fundo do mesmo esteja em contato com a mesa.
- **Etapa 5.** Abra a mão e afaste-a do copo.
- **Etapa 6.** Abra a torneira do filtro.
- **Etapa 7.** Feche a torneira do filtro quando o volume de água no copo atingir quatro quintos de sua capacidade máxima.
- **Etapa 8.** Repita o primeiro e o segundo passos.
- **Etapa 9.** Leve o copo à boca de modo que a borda lateral superior externa do copo esteja em contato com a parte interior do lábio inferior e que o fundo do copo esteja voltado para baixo.
- **Etapa 10.** Abra a boca.
- **Etapa 11.** Derrame um quinto da água do copo dentro da boca.
- **Etapa 12.** Feche a boca.
- **Etapa 13.** Engula a água.
- **Etapa 14.** Repita a Etapa 10, a Etapa 11, a Etapa 12 e a Etapa 13 até que o copo esteja vazio.
- **Etapa 15.** Coloque o copo sobre a mesa com o fundo em contato com a superfície da mesma. Abra a mão e afaste-a daquele.

Nosso assunto nesse texto são as **figuras fractais**. Veremos na sequência que os exemplos clássicos que estudaremos necessitam de uma noção correlata à noção de algoritmo para serem descritos. Os fractais são objetos matemáticos em que cada uma de suas partes é semelhante ao todo. Isso significa que os padrões da figura inteira são repetidos em cada uma de suas partes, mas em escalas menores. Podemos intuir então que um fractal é uma figura infinita. De fato, para toda lente de aumento que usarmos, capaz de ampliar a imagem tanto quanto desejarmos, poderemos sempre reconhecer a figura inicial. Conseqüentemente, não encontraremos uma barreira que nos impeça de reduzir as escalas de tamanho da figura inicial. As imagens a seguir são dois belos exemplos desses objetos matemáticos.



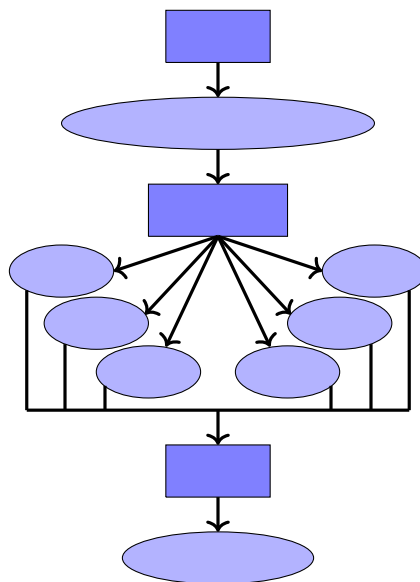
**Figura 1.1:** Parte do fractal conhecido como Conjunto de Mandelbrot. [1]



**Figura 1.2:** Parte do fractal conhecido como Conjunto de Mandelbrot, denominada Ilha de Julia. [2]

## 2. LÍMITES ALGORÍTMICOS

Em um primeiro momento, não devemos esperar que algoritmos possam nos ajudar no estudo de figuras infinitas como os fractais. Isto porque algoritmos são sempre sequências finitas de procedimentos, como exemplificamos na figura abaixo. Com efeito, os algoritmos não serão uma resposta para o caminho que desejamos percorrer. Entretanto, os **limites algorítmicos** serão a chave para compreendermos os objetos matemáticos de interesse. Não formalizaremos esta noção porque sua compreensão intuitiva será suficiente para entendermos nossos futuros amigos. Veremos que pensar sobre tais objetos matemáticos como obtidos através de limites algorítmicos será eficaz quando procurarmos descrever algumas de suas propriedades geométricas.



**Figura 2.1:** Algoritmos são sequências finitas de procedimentos.

Vejam os então a ideia de limite algorítmico, seguida de um exemplo que nos será bastante útil mais adiante. Iniciaremos nossa conversa fixando um algoritmo bem definido que seja composto por passos bastante parecidos uns aos outros. Com isso queremos dizer que esses passos aplicam recursivamente uma operação padrão. Poderemos então acrescentar mais e mais etapas análogas a esse algoritmo a fim de refinar cada vez mais seus resultados finais. Tais acréscimos estruturarão outros algoritmos, que serão as extensões naturais daqueles que escrevemos inicialmente. O limite algorítmico desses processos são o resultado do limite matemático desses algoritmos estendidos. Este procedimento não define um algoritmo, mas sim um limite de algoritmos. Este é o significado que desejamos dar para a expressão que usamos anteriormente e que usaremos na sequência deste artigo. Para exemplificar a ideia deste parágrafo e, conseqüentemente, justificar os conceitos explicados nesta seção, vejamos o problema a seguir.

**Problema.** Sejam  $a$  e  $r$  números reais, com  $r \in (-1, 1)$ . Encontre a soma infinita dos termos da progressão geométrica que tem  $a$  como termo inicial e  $r$  como razão. Tal sequência é aquela que tem como primeiro termo o valor  $a$  e cujos termos consecutivos são obtidos multiplicando  $a$  por potências apropriadas da razão  $r$ .

Não somos capazes de descrever, inicialmente, uma solução para o problema posto acima. Entretanto, podemos começar devagar, resolvendo um problema mais simples. De fato, mesmo não sabendo somar os infinitos termos de uma progressão geométrica, somos capazes de somar, digamos, os cinco primeiros termos dessa sequência. Para tanto, devemos por na prática os passos do algoritmo a seguir.

**Algoritmo.** (Para somar os cinco primeiros termos de uma progressão geométrica).

- **Etapa 1.** Chame de  $S_1$  o número  $a$ .
- **Etapa 2.** Some  $S_1$  com o número  $a \cdot r$ . Chame de  $S_2$  esta soma.
- **Etapa 3.** Some  $S_2$  com o número  $a \cdot r^2$ . Chame de  $S_3$  esta soma.
- **Etapa 4.** Some  $S_3$  com o número  $a \cdot r^3$ . Chame de  $S_4$  esta soma.
- **Etapa 5.** Some  $S_4$  com o número  $a \cdot r^4$ . Chame de  $S_5$  esta soma.

Deve estar claro que poderíamos somar mais termos dessa sequência, fazendo algoritmos muito parecidos com aquele acima. Com efeito, se quiséssemos somar os seis primeiros termos dessa progressão geométrica, acrescentaríamos a sexta etapa, que consistiria em somar  $S_5$  com o número  $a \cdot r^5$ , e chamar de  $S_6$  esta soma. Em geral, se quiséssemos somar seus  $n$  primeiros termos, deveríamos definir uma extensão do algoritmo acima até a  $n$ -ésima etapa, que consistiria em chamar de  $S_n$  a soma de  $S_{n-1}$  com o número  $a \cdot r^{n-1}$ . Consequentemente, levando a cabo o seguinte procedimento de cálculo:

$$\begin{array}{r} S_n \\ r \cdot S_n \\ \hline (1-r) \cdot S_n \end{array} = \begin{array}{r} a + a \cdot r + \dots + a \cdot r^{n-1} \\ a \cdot r + \dots + a \cdot r^{n-1} + a \cdot r^n \\ a \end{array}$$

alcançaríamos o seguinte resultado:

$$S_n = \frac{a - a \cdot r^n}{1 - r}.$$

Mesmo somando tantos termos quantos forem de nosso interesse, jamais chegaremos à soma infinita procedendo assim. Entretanto, a cada termo que adicionamos, intuitivamente, melhoramos o resultado final. Esta impressão pode ser verificada formalmente através do estudo dos limites de sequências, ou ainda, mais especificamente, através do estudo das séries de números reais. Portanto, apesar de nenhuma das extensões do algoritmo acima ter como resultado a soma desejada, ela é obtida através do limite algorítmico desses processos que, nesse caso, através da ideia matemática de limite, tem o resultado:

$$S_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a}{1-r}.$$

Vale dizer que usaremos as fórmulas explicadas nesta seção para calcular a área delimitada pelo Floco de Neve de Koch. Nessa ocasião, escreveremos:

$$S_n = a + \sum_{j=1}^{n-1} a \cdot r^j$$

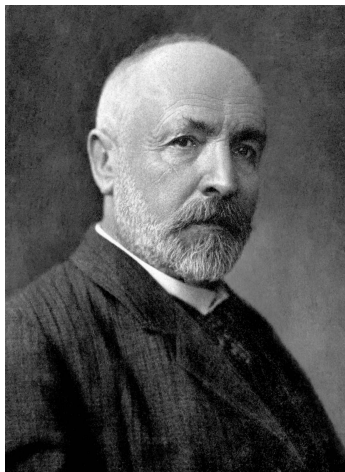
e, também:

$$S_{\infty} = a + \sum_{j=1}^{\infty} a \cdot r^j,$$

para denotar as somas de uma progressão geométrica que tem  $a$  como termo inicial e  $r$  como razão. Para terminar, seria interessante se o leitor se perguntasse em quais momentos utilizamos o fato de o módulo da razão ser um número menor do que 1. Em outras palavras, em quais momentos usamos o fato de  $r$  pertencer ao intervalo  $(-1, 1)$ ?

### 3. O CONJUNTO DE CANTOR

Daremos início a nossa exploração das figuras fractais com o **Conjunto de Cantor**, que é um objeto relativamente simples justamente por poder ser descrito com um limite algorítmico. Ele foi introduzido oficialmente na História da Matemática pelo matemático alemão **Georg Cantor** em 1883, apesar de ter sido descoberto pelo astrônomo britânico **Henry Smith** em 1874. O leitor mais experiente se lembrará de que o Conjunto de Cantor pode ser visto como um exemplo de subconjunto perfeito da reta real. Ou seja, um subconjunto compacto, não enumerável e totalmente desconexo da reta real.



**Figura 3.1:** *Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 - 1918). [3]*



Figura 3.2: Henry John Stephan Smith (1826 - 1883). [4]

**Algoritmo.** (Para iniciar a construção do Conjunto de Cantor).

- **Etapa 1.** Desenhe um segmento de reta.



- **Etapa 2.** Divida este segmento em três partes iguais. Remova sua parte central.



- **Etapa 3.** Divida cada um dos dois segmentos que restaram na etapa anterior em três partes iguais. Remova as partes centrais de cada um deles.



Bem como no exemplo da soma infinita dos termos de uma progressão geométrica, o leitor deve ter percebido que o algoritmo acima pode ser estendido a um número natural qualquer de etapas. Isto porque, se assumirmos que a Etapa  $(n - 1)$  tenha sido definida, então diremos que a Etapa  $n$  é aquela em que, após dividirmos cada um dos  $2^{n-2}$  segmentos que restaram na Etapa  $(n - 1)$  em três partes iguais, retiramos suas partes centrais, totalizando  $2^{n-1}$  segmentos. O Conjunto de Cantor é o objeto matemático obtido como limite algorítmico desses processos. Diremos que as etapas desses algoritmos estendidos são as etapas da construção do Conjunto de Cantor.



Figura 3.3: Etapa avançada da construção do Conjunto de Cantor, que ajuda a intuir sua forma geométrica.

Vamos nos convencer agora que pensar sobre o Conjunto de Cantor através de limites algorítmicos é uma maneira eficaz de extrair informação desse objeto. Para isso, consideremos a seguinte pergunta: Qual o comprimento dessa figura fractal? Para nos auxiliar nessa empreitada, fizemos a tabela abaixo, que contém os principais dados acerca das etapas da construção do Conjunto de Cantor. Deixaremos a demonstração das fórmulas nela apresentadas como exercícios para o leitor. Recomendamos o uso do *Princípio de Indução Finita* para isso.

Etapa	Número de segmentos	Comprimento de cada segmento	Comprimento total
1	1	$L$	$L$
2	2	$\left(\frac{1}{3}\right)L$	$\left(\frac{2}{3}\right)L$
3	$2^2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 L$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 L$
4	$2^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 L$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 L$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$2^{n-1}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} L$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} L$

**Tabela 3.1:** Dados sobre as etapas do procedimento de construção do Conjunto de Cantor.

Não é possível desenhar o Conjunto de Cantor e, depois, com auxílio de uma régua, medi-lo. Isto porque jamais poderíamos fazê-lo completamente, dado que é uma figura infinita. O melhor que seríamos capazes de fazer seria esboçar uma etapa bastante avançada de seu processo de construção. Entretanto, devido às limitações físicas e computacionais, não poderíamos continuar nosso desenho depois de um certo número de etapas. Mas a Matemática não sofre desse mal! Ou seja, matematicamente, é sempre possível um próximo passo. Esta ideia é o cerne conceitual dos limites algorítmicos.

Vejam então que não é complicado verificar que o comprimento do Conjunto de Cantor é zero. Entretanto, para isso, é necessário termos em mente o seguinte fato, que uma análise criteriosa diz ser correto: *O comprimento de uma etapa qualquer do processo de construção do Conjunto de Cantor é estritamente maior do que seu comprimento.* Desse modo, se supusermos que o comprimento do Conjunto de Cantor seja positivo, e obtivermos uma etapa de seu processo de construção que tenha comprimento menor do que o seu, então isto será uma inconsistência. Consequentemente, a única possibilidade será seu comprimento ser nulo. De fato, se  $\alpha > 0$  é o comprimento do Conjunto de Cantor, então o comprimento da etapa associada ao primeiro número natural maior do que  $1 + \log_{2/3} \left(\frac{\alpha}{L}\right)$  será menor do que o comprimento do Conjunto de Cantor. Deixaremos os detalhes desta verificação técnica para o caro leitor, sugerindo que se recorde das propriedades dos logaritmos de números reais, caso necessário.



#### 4. A CURVA DE KOCH

Falaremos agora sobre a **Curva de Koch**. Este objeto matemático deve seu aparecimento oficial na História da Matemática ao matemático sueco **Helge von Koch**, que a expôs no trabalho intitulado “**Sobre curvas contínuas sem tangentes, construtíveis a partir de Geometria Elementar**”, publicado em 1904. O leitor mais experiente se lembrará de que esse objeto é um exemplo de curva contínua que não é diferenciável em nenhum de seus pontos. Além disso, este fractal plano não possui nenhum ponto tal que ao seu redor a curva seja gráfico de função. Ou seja, esta curva não é localmente gráfico de função em nenhum de seus pontos.



**Figura 4.1:** *Niels Fabian Helge von Koch (1870 - 1924).* [5]

**Algoritmo.** (Para iniciar a construção da Curva de Koch).

- **Etapa 1.** Desenhe um segmento de reta.



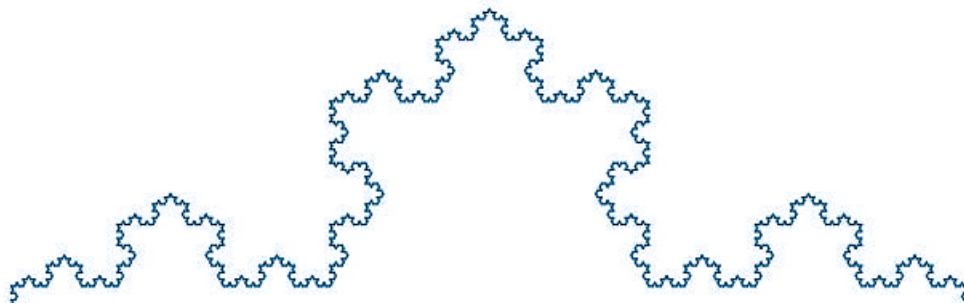
- **Etapa 2.** Divida este segmento em três partes iguais. Construa um triângulo equilátero sobre sua parte central. Retire a base deste triângulo.



- **Etapa 3.** Divida cada um dos quatro segmentos que surgiram na etapa anterior em três partes iguais. Em cada uma das partes centrais, desenhe um triângulo equilátero. Retire as bases destes novos triângulos equiláteros.



Também é possível estender o algoritmo acima a um número natural qualquer de etapas. Com efeito, se assumirmos que a Etapa  $(n - 1)$  tenha sido definida, então diremos que a Etapa  $n$  é aquela em que, após dividirmos cada um dos  $4^{n-2}$  segmentos que restaram na Etapa  $(n - 1)$  em três partes iguais e desenharmos triângulos equiláteros em suas partes médias, retiramos suas bases, totalizando  $4^{n-1}$  novos segmentos. A Curva de Koch é o objeto matemático obtido como limite algorítmico destas extensões. Diremos que as etapas desses algoritmos estendidos são as etapas da construção da Curva de Koch.



**Figura 4.2:** Etapa avançada da construção da Curva de Koch, que ajuda a intuir sua forma geométrica. [6]

Faremos agora a mesma pergunta que fizemos no final da seção anterior, mas sobre a Curva de Koch: Qual o comprimento dessa figura fractal? Para responder essa questão, usaremos a tabela a seguir, que contém os principais dados sobre o processo de construção desse objeto matemático. Mais uma vez, apesar de o leitor poder acreditar nessas fórmulas, seria interessante que o mesmo as provasse através do *Princípio de Indução Finita*. Além disso, será necessário termos em mente o seguinte fato, que uma análise criteriosa diz ser correto: *O comprimento de uma etapa qualquer do processo de construção da Curva de Koch é estritamente menor do que seu comprimento*. Devemos ter todos esses fatos claros porque, como antes, não é possível desenhar a Curva de Koch e, depois, com auxílio de uma régua, medi-la.

Tendo as informações elencadas acima claras e à disposição, também não é difícil verificar que o comprimento da Curva de Koch é infinito. De fato, se supusermos que o comprimento da Curva de Koch seja positivo, e obtivermos uma etapa de seu processo de construção que tenha comprimento

Etapa	Número de segmentos	Comprimento de cada segmento	Perímetro total
1	1	$L$	$L$
2	4	$\left(\frac{1}{3}\right) L$	$\left(\frac{4}{3}\right) L$
3	$4^2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 L$	$\left(\frac{4}{3}\right)^2 L$
4	$4^3$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 L$	$\left(\frac{4}{3}\right)^3 L$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$4^{n-1}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} L$	$\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} L$

**Tabela 4.1:** Dados sobre as etapas do procedimento de construção da Curva de Koch.

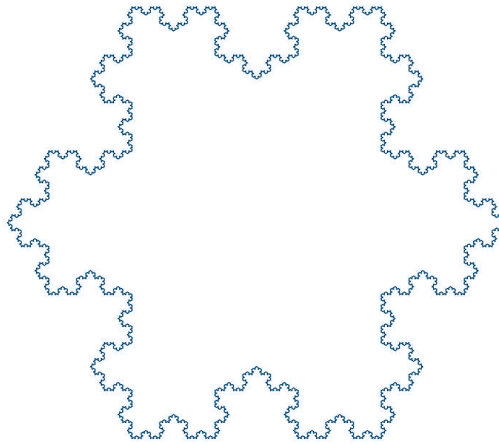
maior do que o seu, então isto será uma inconsistência. Consequentemente, a única possibilidade será seu comprimento ser infinito. Com efeito, se  $\alpha > 0$  é o comprimento da Curva de Koch, então o comprimento da etapa associada ao primeiro número natural maior do que  $1 + \log_{4/3} \left(\frac{\alpha}{L}\right)$  será maior do que o comprimento da Curva de Koch. Deixamos também os detalhes desta verificação para o leitor.

## 5. O FLOCO DE NEVE DE KOCH

Voltaremos nossa atenção agora para o **Floco de Neve de Koch**. Este fractal descende da Curva de Koch, que estudamos na seção anterior. O leitor mais experiente se lembrará de que aquela figura fractal é um exemplo de subvariedade topológica do plano cartesiano que não é uma subvariedade mergulhada diferenciável, dado que não admite nenhuma estrutura suave compatível com mergulho padrão.

O Floco de Neve de Koch é a figura fractal que consiste em construir uma Curva de Koch sobre cada um dos lados de um triângulo equilátero. Por conta disso, deixaremos para o caro leitor a escrita detalhada de um procedimento de limite algorítmico que o tenha como resultado. A fim de obter inspiração para isso, recomendamos uma olhadela na construção da Curva de Koch. Isto porque alterar os passos que descrevemos naquela ocasião pode ser suficiente para resolver o problema em questão.

Devemos dizer também, para dirigir a atenção do leitor para os pontos principais, que o perímetro do Floco de Neve de Koch é infinito. Isto porque o comprimento da Curva de Koch é infinito. Alertamos que estamos chamando de perímetro a medida associada ao Floco de Neve de Koch porque esta figura é contínua e fechada, diferentemente do Conjunto de Cantor, que não é contínuo, e da Curva de Koch, que não é fechada.



**Figura 5.1:** *Etapa avançada da construção do Floco de Neve de Koch, que ajuda a intuir sua forma geométrica. [7]*

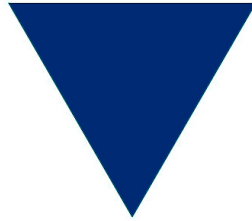
Há um problema interessante a ser resolvido no que se refere ao Floco de Neve de Koch, que consiste em encontrar a área por ele delimitada. Para isso, usaremos a tabela a seguir. Esta tem em suas colunas alguns dos dados que coletamos das etapas do processo de construção dessa figura fractal. Como sempre, deixaremos a demonstração das fórmulas nela apresentadas como exercícios para o leitor.

Etapa	Número de segmentos	Número de novos triângulos	Comprimento de cada segmento	Perímetro total
1	3	1	$L$	$3L$
2	$3 \cdot 4$	3	$\left(\frac{1}{3}\right) L$	$3 \left(\frac{4}{3}\right) L$
3	$3 \cdot 4^2$	$3 \cdot 4$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 L$	$3 \left(\frac{4}{3}\right)^2 L$
4	$3 \cdot 4^3$	$3 \cdot 4^2$	$\left(\frac{1}{3}\right)^3 L$	$3 \left(\frac{4}{3}\right)^3 L$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$3 \cdot 4^{n-1}$	$3 \cdot 4^{n-2}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} L$	$3 \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} L$

**Tabela 5.1:** *Dados sobre as etapas do procedimento de construção do Floco de Neve de Koch.*

Vejamos então o que acontece com a área delimitada pelas figuras de cada etapa da construção do Floco de Neve de Koch:

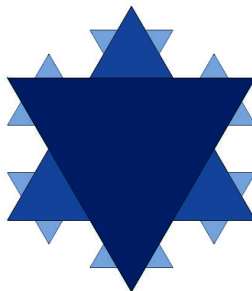
- **Etapa 1.** Há apenas o triângulo equilátero inicial. Daí a área da figura desta etapa ser igual a  $\frac{\sqrt{3}L^2}{4}$ .



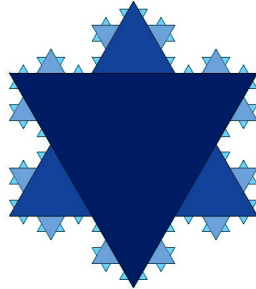
- **Etapa 2.** Além do triângulo equilátero inicial, surgem três triângulos equiláteros com razão constante de proporcionalidade em relação ao triângulo básico igual a um terço. Daí a área da figura desta etapa ser igual à área da Etapa 1 mais a área de cada um dos triângulos que surgem. Ou seja,  $\frac{\sqrt{3}L^2}{4} \left[ 1 + 3 \left( \frac{1}{9} \right) \right]$ .



- **Etapa 3.** Além do triângulo equilátero inicial e dos três triângulos equiláteros que foram criados na segunda etapa, surgem doze novos triângulos equiláteros com razão constante de proporcionalidade em relação ao triângulo básico igual a um nono. Daí a área da figura desta etapa ser a área da Etapa 2 mais a área de cada um dos triângulos que surgem. Ou seja,  $\frac{\sqrt{3}L^2}{4} \left[ 1 + 3 \left( \frac{1}{9} \right) + 3 \cdot 4 \left( \frac{1}{9} \right)^2 \right]$ .



- **Etapa 4.** Além do triângulo equilátero inicial, dos três triângulos equiláteros que foram criados na segunda etapa e, também, dos doze triângulos equiláteros que foram criados na terceira etapa, surgem quarenta e oito novos triângulos equiláteros com razão constante de proporcionalidade em relação ao triângulo básico igual a um vinte e sete avos. Daí a área da figura desta etapa ser a área da Etapa 3 mais a área de cada um desses novos triângulos. Ou seja,  $\frac{\sqrt{3}L^2}{4} \left[ 1 + 3 \left(\frac{1}{9}\right) + 3 \cdot 4 \left(\frac{1}{9}\right)^2 + 3 \cdot 4^2 \left(\frac{1}{9}\right)^3 \right]$ .



As observações feitas nestas quatro primeiras etapas sugerem que a lei que rege a área da figura da Etapa  $n$  é dada pela adição da área da Etapa  $(n - 1)$  com o produto da área do triângulo inicial pela quantidade de triângulos novos que surgem na Etapa  $n$  e pela razão constante de proporcionalidade destes em relação àquele triângulo equilátero inicial. Logo, sendo a área dos triângulos introduzidos na Etapa  $n$  igual a:

$$\left(\frac{\sqrt{3}L^2}{4}\right) (3 \cdot 4^{n-2}) \left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} = \frac{\sqrt{3}L^2}{4} \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1},$$

a área total na Etapa  $n$  é igual a:

$$\frac{\sqrt{3}L^2}{4} \left[ 1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{4}{9}\right)^j \right].$$

Desta forma, como a área do *Floco de Neve de Koch*, que denotaremos doravante por  $A_F$ , é obtida por um processo limite, temos:

$$\begin{aligned} A_F &= \frac{\sqrt{3}L^2}{4} \left[ 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{4}{9}\right)^j \right] \\ &= \frac{\sqrt{3}L^2}{4} \left[ 1 + \left( \frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{4}{9}} - \frac{3}{4} \right) \right] \\ &= \frac{\sqrt{3}L^2}{4} \left[ 1 + \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{4}{5}\right) \right] \\ &= \frac{2\sqrt{3}L^2}{5}. \end{aligned}$$

## 6. O TRIÂNGULO DE SIERPINSKI

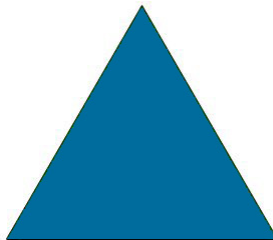
Veremos agora o **Triângulo de Sierpinski**. Este fractal tem um processo de construção dual ao processo de construção do Floco de Neve de Koch. Isto porque este foi obtido acrescentando figuras, ao passo que aquele é obtido retirando figuras. O nome da figura que estamos considerando aqui se deve ao matemático polonês **Waclaw Sierpinski**, que o introduziu na História da Matemática em 1915. É interessante notar que esta figura apareceu como padrão decorativo muitos séculos antes do trabalho deste matemático.



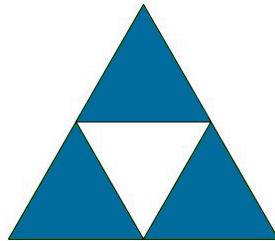
**Figura 6.1:** *Waclaw Sierpinski (1882 - 1969). [8]*

**Algoritmo.** (Para iniciar a construção do Triângulo de Sierpinski).

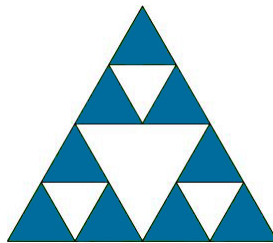
- **Etapa 1.** Desenhe um triângulo equilátero, demarcando a área por ele delimitada.



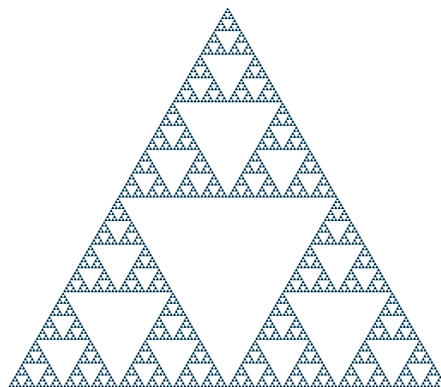
- **Etapa 2.** Demarque os pontos médios dos lados do triângulo da etapa anterior. Desenhe o triângulo equilátero cujos vértices são estes pontos médios. Depois disso, remova a área por ele delimitada.



- **Etapa 3.** Demarque os pontos médios dos lados dos três triângulos da etapa anterior. Desenhe os triângulos equiláteros cujos vértices são estes pontos médios. Depois disso, remova as áreas por eles delimitadas.



O leitor pode perceber rapidamente que é possível estender o algoritmo acima a um número natural qualquer de etapas. Isto porque, se assumirmos que a Etapa  $(n - 1)$  tenha sido definida, então diremos que a Etapa  $n$  é aquela em que, após demarcarmos os pontos médios dos lados de cada um dos  $3^{n-3}$  triângulos da Etapa  $(n - 1)$  e desenharmos os triângulos equiláteros cujos vértices são estes pontos médios, removemos as áreas por eles delimitadas, totalizando  $3^{n-2}$  novos triângulos equiláteros. O Triângulo de Sierpinski é o objeto matemático obtido como limite algorítmico destas extensões. Diremos que as etapas desses algoritmos estendidos são as etapas da construção do Triângulo de Sierpinski.



**Figura 6.2:** Etapa avançada da construção do Triângulo de Sierpinski, que ajuda a intuir sua forma geométrica. [9]



Entendemos como perímetro do Triângulo de Sierpinski a soma dos comprimentos de todos os segmentos que o compõem, não somente dos lados do triângulo equilátero inicial. Deste modo, qual o perímetro dessa figura? Além disso, a área delimita por este fractal é claramente menor do que a do triângulo equilátero com o qual começamos, mas qual é seu valor exato? Para responder essas questões, usaremos a tabela a seguir. Esta tem em suas colunas alguns dos dados que coletamos das etapas do processo de construção dessa figura fractal. Como de praxe, a demonstração das fórmulas apresentadas é um exercício para o leitor.

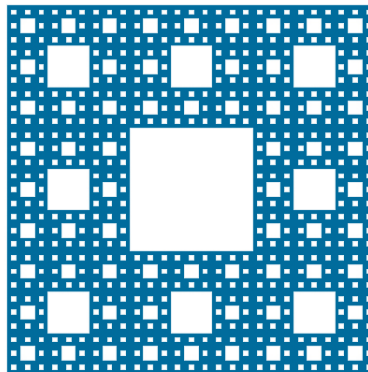
Etapa	Número de buracos novos	Área de um novo buraco	Área removida	Perímetro total
1	0	0	0	$3L$
2	1	$\sqrt{3} \left(\frac{1}{4}\right)^2 L^2$	$\sqrt{3} \left(\frac{1}{4}\right)^2 L^2$	$3 \left(\frac{3}{2}\right) L$
3	3	$\sqrt{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 L^2$	$3\sqrt{3} \left(\frac{1}{4}\right)^3 L^2$	$3 \left(\frac{3}{2}\right)^2 L$
4	$3^2$	$\sqrt{3} \left(\frac{1}{4}\right)^4 L^2$	$3^2 \sqrt{3} \left(\frac{1}{4}\right)^4 L^2$	$3 \left(\frac{3}{2}\right)^3 L$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$	$3^{n-2}$	$\sqrt{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n L^2$	$3^{n-2} \sqrt{3} \left(\frac{1}{4}\right)^n L^2$	$3 \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} L$

Deixaremos também para que o caro leitor se inspire nas contas que fizemos para o Floco de Neve de Koch e demonstre que a área delimitada pelo Triângulo de Sierpinski é nula. Para isso, recomendamos o cálculo do total de área retirada e sua comparação com a área do triângulo equilátero inicial.

Vejamos que não é complicado verificar que o perímetro do Triângulo de Sierpinski é infinito. Entretanto, para isso, é necessário termos em mente o seguinte fato, que uma análise criteriosa diz ser correto: *O perímetro de uma etapa qualquer do processo de construção do Triângulo de Sierpinski é estritamente menor do que seu perímetro.* Desse modo, se supusermos que o perímetro do Triângulo de Sierpinski seja positivo, e obtivermos uma etapa de seu processo de construção que tenha perímetro maior do que o seu, então isto será uma inconsistência. Conseqüentemente, a única possibilidade será seu perímetro ser infinito. Com efeito, se  $\alpha > 0$  é o perímetro do Triângulo de Sierpinski, então o perímetro da etapa associada ao primeiro número natural maior do que o valor real  $1 + \log_{3/2} \left(\frac{\alpha}{3L}\right)$  será maior do que o perímetro do Triângulo de Sierpinski. Deixaremos também os detalhes desta verificação puramente técnica para o leitor.

## 7. O QUADRADO DE SIERPINSKI

Para terminar este texto e, conseqüentemente, nossa exposição sobre as figuras fractais mais importantes da História da Matemática, falaremos sobre o **Quadrado de Sierpinski**. Este fractal também foi descrito pela primeira vez por **Waclaw Sierpinski**, mas um ano após a descrição do Triângulo de Sierpinski, em 1916. O leitor mais experiente se lembrará de que o Quadrado de Sierpinski é uma generalização do Conjunto de Cantor para duas dimensões e, também, procurará generalizar esta ideia para dimensões maiores.



**Figura 7.1:** Etapa avançada da construção do Quadrado de Sierpinski, que ajuda a intuir sua forma geométrica. [10]

O Quadrado de Sierpinski é construído de maneira muito semelhante ao Triângulo de Sierpinski. Por conta disso, deixaremos para o leitor a escrita detalhada de um procedimento de limite algorítmico que o tenha como resultado. A fim de obter inspiração para isso, recomendamos outra olhadela na construção do Triângulo de Sierpinski. Entretanto, visualizaremos a seguir alguns passos de sua construção no **Fractal Tool**. Este aplicativo necessita extensão *Java*, funcionando em navegadores como o *Internet Explorer*, mas não em navegadores mais populares como *Google Chrome* ou *Mozilla Firefox*.



**Figura 7.2:** Interface do aplicativo Fractal Tool.

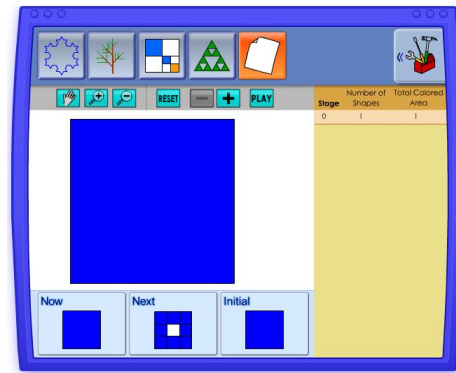


Figura 7.3: Primeira etapa da construção do Quadrado de Sierpinski.

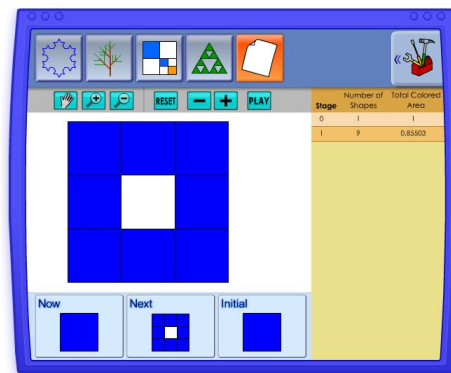


Figura 7.4: Segunda etapa da construção do Quadrado de Sierpinski.

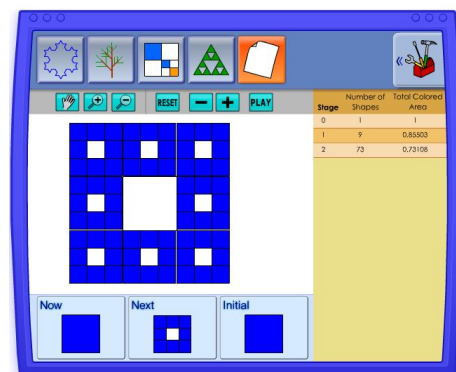


Figura 7.5: Terceira etapa da construção do Quadrado de Sierpinski.

Finalmente, deixaremos como longo e divertido exercício o trabalho de descrever o perímetro total, que é infinito, e a área delimitada, que é nula, do Quadrado de Sierpinski. Recomendamos a construção de uma tabela análoga a que fizemos para o Triângulo de Sierpinski. Esta deve ter em suas colunas dados coletados das etapas do processo de construção dessa figura fractal que sejam úteis para os argumentos a serem usados. Lembramos que devem ser demonstradas as fórmulas apresentadas.

## 8. CONCLUSÕES

- Os algoritmos são uma forma muito eficaz de lidar com problemas. Eles podem ser encontrados em situações simples do cotidiano, como beber a água de um filtro usando um copo, bem como em situações complexas, exemplificadas pelas discussões que apresentamos. De fato, várias vezes, pudemos localizar comportamentos algorítmicos nas figuras vistas, que facilitaram bastante o estudo de aproximações dos objetos em questão. Entretanto, quando falamos de fractais, tal noção não se mostrou frutífera, dado que há uma incompatibilidade entre a infinitude daqueles e a finitude desses. Daí surgiu a necessidade de usar os limites algorítmicos, que fazem parte de um pensamento matemático que extrapola a finitude dos algoritmos mas sem perder as informações que estes nos trazem.
- A soma infinita de uma progressão geométrica é o primeiro exemplo de série infinita com o qual entramos em contato. Isto porque, oficialmente, a aprendemos nos anos iniciais do Ensino Médio. Além de os termos que a compõem terem um padrão bastante simples, ela possui uma fórmula explícita que nos permite calcular seu valor. Na Matemática, o primeiro problema quando lidamos com somas infinitas abstratas é o de decidir quais delas fazem sentido. Em termos mais técnicos, quais delas são convergentes. Existem muitos resultados que nos ajudam a decidir sobre essa questão, mas não há uma resposta definitiva para ela. Uma das ferramentas mais conhecidas nesse sentido é o *Teste da Comparação*. Este garante a convergência de uma série a partir da sabida convergência de outra. Não são poucas as situações em que comparamos uma série de interesse com a série gerada por uma progressão geométrica infinita. Isto ajuda a entender que essa soma infinita não é somente um primeiro exemplo nesse contexto, bastante útil inclusive pelos usos que vimos nesse texto, mas também é uma série essencial em situações mais avançadas.
- Os exemplos que vimos nos fornecem figuras geométricas que escapam à intuição física cotidiana. Com efeito, vimos o exemplo do Floco de Neve de Koch, que é um objeto geométrico que pode ser pintado mas cujo contorno não pode ser desenhado. Isto porque sua área é finita ao passo que seu perímetro é infinito. No fim do texto, para encerrar, vimos dois casos ainda mais perturbadores. De fato, tanto o Triângulo de Sierpinski quanto o Quadrado de Sierpinski possuem perímetros infinitos e áreas nulas. No mundo dos fractais, coisas estranhas podem acontecer!

- Os fractais que foram estudados neste texto são especiais, são chamados fractais regulares. A grande maioria das figuras fractais não é desse tipo. Dois exemplos que não o são podem ser vistos nas duas primeiras figuras deste trabalho. O estudo desses outros objetos pode ser bastante complicado. Isto porque há problemas em aberto na pesquisa em Matemática Pura até os dias de hoje. Para se ter uma ideia das dificuldades encontradas no estudo dos fractais, até o presente momento, ninguém forneceu uma definição matemática universalmente aceita para esses objetos. Recomendamos ao leitor interessado nossas referências. Estas contêm exposições com diferentes níveis e finalidades, apesar de necessitarem de alguns conhecimentos mais aprofundados em Matemática.
- Os fractais são muito úteis nas ciências da atualidade. Por exemplo, na Astrofísica, eles se relacionam com a distribuição das estrelas no universo e com o comportamento dos gases interestelares. Na Biologia, a autossimilaridade também já foi identificada em sequências de genes. Na Ciência da Computação, fractais podem ser usados para modelar no computador objetos naturais com precisões surpreendentes. Dentro da Matemática, o estudo dos fractais mobiliza áreas como a Teoria da Medida e os Sistemas Dinâmicos, com o estudo, por exemplo, das funções contínuas não diferenciáveis em ponto algum. Tem-se também as áreas da Geometria Fractal e da Análise Fractal, em que se sustentam as aplicações acima citadas. Recomendamos a leitura da segunda parte desse trabalho para o leitor que se interessar por um aplicação prática desses conceitos.

#### FIGURAS

- [1] **Figura 1.1.** Disponível em: <[https://es.wikipedia.org/wiki/Consciencia\\_m%C3%A1s\\_all%C3%A1\\_de\\_la\\_vida#/media/Archivo:Mandel\\_zoom\\_12\\_satellite\\_spirally\\_wheel\\_with\\_julia\\_islands.jpg](https://es.wikipedia.org/wiki/Consciencia_m%C3%A1s_all%C3%A1_de_la_vida#/media/Archivo:Mandel_zoom_12_satellite_spirally_wheel_with_julia_islands.jpg)>. Acesso em: 13/04/2020.
- [2] **Figura 1.2.** Disponível em: <[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/7/7e/Julia\\_0.4\\_0.6.png](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/en/7/7e/Julia_0.4_0.6.png)>. Acesso em: 13/04/2020.
- [3] **Figura 3.1.** Disponível em: <[https://commons.wikimedia.org/wiki/Mandelbrot\\_set#/media/File:Mandel\\_zoom\\_14\\_satellite\\_julia\\_island.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/Mandelbrot_set#/media/File:Mandel_zoom_14_satellite_julia_island.jpg)>. Acesso em: 13/04/2020.
- [4] **Figura 3.2.** Disponível em: <<https://www.maths.ox.ac.uk/node/16357>>. Acesso em: 13/04/2020.
- [5] **Figura 4.1.** Disponível em: <<http://www.clg-mont-miroir.ac-besancon.fr/spip.php?article1499&lang=fr>>. Acesso em: 13/04/2020.
- [6] **Figura 4.2.** Disponível em: <[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d5/Von\\_koch\\_5\\_etapes.svg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d5/Von_koch_5_etapes.svg)>. Acesso em: 13/04/2020.
- [7] **Figura 5.1.** Disponível em: <[https://www.researchgate.net/figure/The-Koch-snowflake\\_fig1\\_273769880](https://www.researchgate.net/figure/The-Koch-snowflake_fig1_273769880)>. Acesso em: 13/04/2020.

[8] **Figura 6.1.** Disponível em: <<https://audiovis.nac.gov.pl/obraz/98444/c7222d201d9e56fd0f1398189ada0fe2/>>. Acesso em: 13/04/2020.

[9] **Figura 6.2.** Disponível em: <[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b7/Sierpinski\\_Triangle.PNG](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b7/Sierpinski_Triangle.PNG)>. Acesso em: 13/04/2020.

[10] **Figura 7.1.** Disponível em: <<https://www.cis.upenn.edu/~cis110/19fa/hw/hw04/sierpinski.html>>. Acesso em: 13/04/2020.

#### REFERÊNCIAS

[D] DEVANEY, R. L. **An introduction to chaotic dynamical systems**. 2. ed. Colorado: Westview Press, c2003.

[Frc1] FRACTAL TOOL. **National Council of Teachers of Mathematics (NCTM)** - Illuminations. Disponível em: <<https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Fractal-Tool/>>. Acesso em: 13/04/2020.

[Frc2] **Fractals: Useful Beauty**. Disponível em: <[www.fractal.org/Bewustzijns-esturings-Model/Fractals-Useful-Beauty.htm](http://www.fractal.org/Bewustzijns-esturings-Model/Fractals-Useful-Beauty.htm)>. Acesso em: 25 jun 2020.

[S] SALLUM, E. M. Fractais no Ensino Médio. **Revista do Professor de Matemática**. Disponível em: <<http://rpm.org.br/cdrpm/57/1.htm>>. Acesso em: 30/03/2020.

[YHK] YAMAGUTI, M.; HATA, M. KIGAMI, J. **Mathematics of fractals**. Providence: American Mathematical Society, 1993.