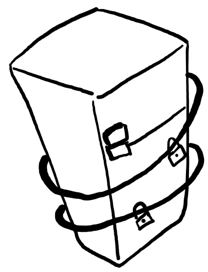
Os problemas da geladeira e dos táxis

Lucas Esperancini Moreira e Moreira

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo
lucasemmoreira@gmail.com



Resumo

Nesse texto vamos falar sobre dois problemas não muito intuitivos, cujas soluções podem ser inesperadas. O primeiro problema trata de uma situação relativamente comum, com uma solução não ortodoxa, que se resume à possibilidade de abrir uma geladeira apenas se houver metade dos moradores de uma casa. O segundo problema discute sobre a confiabilidade de uma testemunha que acerta 80% das vezes. "O que há pra ser discutido?": justamente. [1]

1. 11 pessoas e 1 geladeira

Na vida universitária, para aqueles que moram em repúblicas, podem surgir inúmeros inconvenientes. Um deles, e talvez o mais grave de todos, envolve comidas e bebidas. É bastante comum repúblicas terem muitos moradores e poucos recursos.

Para nosso caso, vamos supor que uma residência onde moram 11 pessoas e há apenas 1 geladeira. Como qualquer bem material, o compartilhamento de uma geladeira fica mais complicado conforme aumenta o número de pessoas envolvidas. A geladeira, por ser pública na moradia, não oferece nenhuma segurança para as comidas. As comidas furtadas pelos colegas em épocas de prova ou o sumiço das cervejas compradas podem ser acontecimentos muito estressantes.

Uma possível solução para esse tipo de problema pode ser burocrática, ou seja, a geladeira só poderá ser aberta se houver pelo menos metade dos moradores na residência. Assim, a comida ou a cerveja seriam roubadas com o consentimento da maioria presente. Entretanto, a dúvida que surgiria é como garantir que a geladeira só seria aberta com metade dos moradores presentes. Novamente, uma república costuma possuir recursos restritos e, portanto, a solução teria que ser de baixo custo.

Uma primeira ideia inocente e aparentemente boa seria trancar a geladeira, ou seja: seriam colocadas trancas na geladeira, dadas as chaves para os moradores e a geladeira abriria com a condição proposta. Para deixar a ideia mais ilustrativa: suponha que seriam colocados cadeados na geladeira, que apenas seria aberta se todos os cadeados fossem abertos. A princípio essa não parece uma ideia cara, porque comprar cadeados e uma corrente para colocar em volta da geladeira não parece causar grandes despesas. Mas isso dependerá diretamente da quantidade de cadeados que deverão ser comprados. Assim, a dúvida que surge é:

Quantos cadeados são necessários comprar e quantas chaves são necessárias que cada morador carregue para que a geladeira abra com pelo menos metade dos moradores?

[1] Figura da geladeira cedida pelo Prof. Leandro Aurichi.

1.1 Solução

Primeiramente, 11, que é o número total de moradores, não é um número par. Como não é possível entregar a chave para meia pessoa o número será arrendondado para cima, isto é, a política para abrir a geladeira indica que deverá haver pelo menos 6 moradores na república.

Dessa forma, **você sabe quantos cadeados são necessários comprar para trancar a geladeira de forma que, com pelo menos 6 moradores, seja possível abri-la**? Tente imaginar um número.

Um pouco de ajuda é sempre bem vinda, certo? Então comece pensando quantos cadeados e chaves seriam necessários para que a geladeira fosse aberta apenas com todos os moradores da república. Sem pressão, mas esse é um caso fácil. Basta trancar a geladeira com 11 cadeados e entregar a chave de cada cadeado para cada um dos moradores. Assim, se na república estão 5 moradores, 5 cadeados seriam abertos. Se estão 9 moradores, 9 cadeados seriam abertos. E portanto, a geladeira só seria aberta com os 11 moradores presentes.

Para descobrir quantas chaves e cadeados são necessários, vamos utilizar análise combinatória. Calma! Não fuja! Será menos doloroso do que a primeira frase sugere. Vamos começar a dar alguns nomes às coisas. A notação em matemática, na humilde opinião deste autor, é uma ferramenta, da mesma forma que o martelo é uma ferramenta para um pedreiro. Então, utilizaremos uma letra maiúscula para denominar um subgrupo do número total de moradores.

Assim vamos para a **primeira afirmação**:

Afirmação 1. Para qualquer grupo de cinco moradores que tentarem abrir a geladeira, eles não vão conseguir porque deve haver pelo menos um cadeado que estas pessoas não abram.

Bom, a matemática funciona de uma forma um pouco mais formal, então vamos tentar formalizar.

Seja G um grupo qualquer de 5 moradores. Suponha que esse grupo G tente abrir a geladeira. Da forma como está sendo construído o problema, depois que todos os moradores abrirem os cadeados que podem, deverá existir pelo menos um cadeado que eles não poderão abrir. Suponha que existe apenas 1. Este cadeado será chamado de C_G, ou seja, Cadeado do grupo G.

Como qualquer bom matemático, essa afirmação será provada neste texto. De novo, "Calma! Não fuja". Vai ser menos doloroso e mais rápido do que imagina. Para provar essa afirmação, será utilizada uma técnica conhecida como "demonstração por contradição". Demonstrações deste caráter buscam provar afirmações do tipo $p \to q$. Calma, lembra que a notação é um ferramenta? Basta entendê-la para conseguir fazer bom uso da mesma.

1.2 Uma breve pausa para entendimentos

Uma afirmação do tipo implicação "$p \to q$" significa que a "hipótese p implica na tese q". Se você torceu o nariz, não se desespere e fique mais um pouco. Chamaremos p e q de proposições. E por enquanto basta sabermos que pode ser uma frase verdadeira ou falsa.

Um exemplo ingênuo pode ser dado da seguinte forma:

$$p : \text{Derrubar seu celular}$$

Suponha que temos a proposição p como nossa hipótese, ou seja, na implicação "$p \to q$", será lido "Se derrubar seu celular". Qual proposição poderia ser a tese? Vamos utilizar o seguinte "q":

$$q : \text{Seu celular quebrará}$$

Portanto, a implicação "$p \to q$" é lida da seguinte forma: "Se derrubar seu celular, então seu celular quebrará".

Você pode, e deve, estar se perguntando: "Por que este texto está dizendo tudo isso?!". Bom, é agora que a matemática brilha: esta implicação "$p \to q$" é equivalente a "não $q \to$ não p" ou, em notação matemática, $\sim q \to \sim p$[2]. "Ahn?" ouço você dizer? Então pense assim: suponha que você não colocou a capinha no seu celular, e portanto, vamos assumir que a implicação "$p \to q$" de fato é verdadeira, ou seja, se você derrubar o celular ele quebrará. Então, negarmos a proposição q "resulta" na negação da proposição p! Uma forma de pensarmos isso é: se seu celular não está quebrado, então você não o derrubou.

Esse raciocínio pode ser formalizado. Pense da seguinte forma: as nossas proposições p e q podem assumir, cada uma, dois valores, verdadeiro ou falso. Na Tabela 1, as duas primeiras colunas contemplam todas as possibilidades dos valores de p e q. Nessa tabela, a coluna "$p \to q$" mostra os "resultados" da implicação considerando todas as possibilidades.

A justificativa dos resultados da relação $p \to q$ deixamos para autor checar (recomendo o texto 2 citado). A terceira e quarta coluna mostram os valores de p e q negados. Por fim, a última coluna mostra o resultado da contrapositiva. Com esta tabela, provamos a equivalência lógica entre as relações $p \to q$ e $\sim p \to \sim q$.

Tabela 1: *Tabela verdade.*

p	q	$\sim q$	$\sim p$	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$
V	V	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V

"Hmm... ok, muito interessante... mas e aí?" você pode me perguntar. Vou tentar responder. Vamos pensar no que acabamos de entender. Aprendemos o que são proposições e o que é uma implicação. Veja que a implicação é uma das ferramentas com a qual a matemática é construída. A partir de hipóteses verdadeiras, novos resultados, ou seja, as teses são concluídas como verdadeiras ou falsas.

Além disso, aprendemos que é possível demonstrar implicações "$p \to q$" de uma forma "alternativa". Nesta forma, chamada de **demonstração por absurdo**, nós negamos a tese e a partir disso concluímos que a nossa hipótese é falsa. Veja que isso é um **absurdo** porque quando vamos construir uma implicação, partimos do pressuposto que a hipótese é verdadeira.

Esta explicação é sucinta e existem materiais que abordam esse assunto de uma forma mais detalhada. Para o que será utilizado adiante, entender esta ideia básica será o suficiente.

1.3 Voltando para a solução

Assim, utilizando a demonstração por absurdo, vamos provar a afirmação anterior. Vamos escrever essa afirmação (Afirmação 1) de uma forma mais "matemática":

Lema: Para cada grupo de G de cinco pessoas que tentar abrir a geladeira, deve existir pelo menos um cadeado para o qual nenhum integrante deste grupo possua a chave.

Demonstração. Vamos ver o que são a nossa hipótese e a nossa tese.

- Hipótese: A geladeira só pode ser aberta com pelo menos 6 moradores.
- Tese: Existe um cadeado para o qual um grupo G de cinco pessoas não tem a chave.

[2]Caso queira se aprofundar um pouco em lógica, o autor recomenda: `http://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/aurichi/lib/exe/fetch.php?media=curso:elementos2016.pdf`

Negar a tese significa dizer que não existe um cadeado que o grupo G não consiga abrir. Portanto, eles conseguiram abrir a geladeira. Isso gera uma contradição da hipótese, pois geladeira foi aberta com 5 moradores. Assim, a tese é verdadeira. □

Seguindo adiante, a dúvida que paira é: qual é a relação desses cadeados com grupos diferentes? Lembre-se que para cada grupo G de 5 pessoas, deve existir um cadeado C_G. Se surgir um grupo diferente, digamos um grupo F também de cinco pessoas. O cadeado para este grupo pode ser o C_G? Deve ser diferente? Para um grupo H, pode ser o cadeado de F? Note que sabemos que basta a geladeira possuir um cadeado, mas qual? Para responder esta simples pergunta, utilizaremos o seguinte teorema:

Teorema: Sejam G e F dois grupos de cinco pessoas diferentes, ou seja, entre os integrantes de G e os integrantes de F, pelo menos uma pessoa é diferente. Então, $C_G \neq C_F$ (ou seja, os cadeados devem ser diferentes!).

Demonstração. A demonstração também será feita por contradição. Para facilitar:

- Hipótese 1: a geladeira só pode ser aberta com pelo menos 6 moradores;
- Hipótese 2: para cada grupo G de 5 pessoas, deve haver 1 cadeado que não pode ser aberto;
- Hipótese 3: G e F são grupos de cinco pessoas de tal forma que pelo menos um integrante de um dos grupos não está no outro. Usando um pouco de notação: $\exists p \in G$ tal que $p \notin F$;
- Tese: o cadeado do grupo G e do grupo F devem ser diferentes. Novamente, com notação: $C_G \neq C_F$.

Por contradição, suponha que o cadeado do grupo G e do grupo F são iguais, ou seja, $C_G = C_F$. Note que se o grupo F juntar-se com o grupo G o número de pessoas deste novo grupo H será no mínimo 6 e no máximo 10. Será no máximo 10 porque os integrantes de G podem ser todos diferentes de F. Será no mínimo 6 porque deve existir pelo menos uma pessoa que não é comum aos dois grupos. Do contrário, seriam o mesmo grupo.

Se você concordou com isso (se não concordou, pense mais um pouco e depois siga), então o grupo H é um grupo de pelo menos 6 pessoas que não é capaz de abrir a geladeira. Ninguém possui a chave para o cadeado C_G. Melou (ou não?)! A hipótese 1 foi contradita. Portanto a tese "os cadeados devem ser diferentes" é verdadeira. □

Veja que o Teorema fornece uma informação muito importante. Fornece uma expectativa da quantidade de cadeados que devem ser comprados. Essa informação pode ser colocada em um corolário.

Corolário: Para cada grupo de cinco pessoas que tentarem abrir a geladeira deve existir pelo menos 1 cadeado que não possam abrir.

Agora, utilizando análise combinatória (não fuja!), vamos descobrir quantos cadeados devem ser comprados. A pergunta a ser respondida é: **de quantas formas é possível agrupar 5 pessoas de um total de 11**? Esta resposta é facilmente obtida utilizando a combinação simples:

$$\overline{C}_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Por partes: $\overline{C}$ é o termo utilizado para designar a combinação simples; n é o número total de elementos, neste caso o número de moradores; p é o número dos elementos em cada grupo, neste caso 5. Portanto, $\overline{C}_{n,p}$ dirá de quantas formas os moradores podem se agrupar em 5 pessoas. Dessa forma, pelo corolário, este número também dirá o número mínimo de cadeados.

$$\overline{C}_{11,5} = \frac{11!}{5!(11-5)!} = 462$$

Chocado? A inocente ideia de utilizar cadeados e trancar a geladeira de repente não parece tão viável. Mas, uma vez que estamos aqui, que tal investigar até o fim? Por exemplo, é possível descobrir quantas chaves seria necessário cada morador carregar (supondo que alguém tivesse ganho 462 cadeados em um prêmio). Assim, a dúvida que fica é: **quantas cópias de chave será necessário tirar e quantas chaves cada morador teria que carregar**?

Pois bem, para responder a essa pergunta, também será necessário utilizar análise combinatória. A resposta é que são necessárias 252 chaves por morador para que esse sistema de proteção à geladeira funcione. Qual é a conta?

$$\overline{C}_{10,5} = \frac{10!}{5!(10-5)!} = 252$$

Por que dessa vez a combinação é uma combinação de 10 moradores agrupados em 5? Uma resposta curta é que desta vez a conta está em relação a um dos moradores.

Uma resposta longa (e provando) é a seguinte: Seja "a" um integrante desta república. Esse integrante carrega um número n de chaves. Lembre-se que, pelo Lema, para qualquer grupo de 5 pessoas que tentar abrir a geladeira deve existir pelo menos um cadeado que esse grupo não abra. Volte para o integrante "a". Se ele chegar depois que esse grupo de 5 pessoas chegou, ele **deve** ter a chave que abre a geladeira. Na verdade, para qualquer grupo de 5 pessoas que tentar abrir a geladeira, ele deve ter a chave. Portanto, o número de chave que qualquer integrante deve ter é o número de possíveis combinações de 5 pessoas entre todos os outros moradores (10). Tchanãm: $\overline{C}_{10,5}$!

1.4 Conclusão

Assim, nós descobrimos que são necessários 462 cadeados e 252 chaves por morador para que esse sistema funcione. Bem, mais ou menos... Se você se recordar, no Lema, na tese havia a seguinte informação: "[..] deve existir **pelo menos** um cadeado". Este "pelo menos" é um detalhe que, apesar de simples, não deve ser ignorado. Note que o Lema garante apenas que seria necessário ter pelo menos 1 cadeado mas nada garante que apenas 1 seja necessário.

Assim, as contas feitas anteriormente são limitantes inferiores para o problema, ou seja, para esse sistema de trancar a geladeira e permitir que seja aberta apenas com 6 moradores ou mais são necessários, no mínimo, 462 cadeados e, no mínimo, 252 chaves para cada morador. Mas então como saber quantos cadeados e chaves são realmente necessários? A resposta é surpreendentemente fácil e incrivelmente sutil. Está descrita a seguir.

Suponha que serão feitos os 462 cadeados e as 252 chaves por morador. Além disso, será escrito o nome de 6 pessoas diferentes em cada cadeado. As pessoas que tiveram seus nomes escritos nos cadeados receberão uma chave para poder abri-los. Ou seja, suponha que em um cadeado seja escrito os nomes: Paul, John, Ringo, George, Roger e David. Neste caso, esses 6 integrantes receberiam a chave para abrir esse cadeado e nenhum outro morador receberia a chave para abrir esse cadeado. Mas de quantas formas é possível escrever o nome dos moradores nos cadeados? Perceba que o número de maneiras de escrever 6 nomes do total de 11 moradores é dado por:

$$\overline{C}_{11,6} = \frac{11!}{6!(11-6!)} = 462$$

O resultado foi exatamente o número de cadeados comprados. Dessa forma, em todos os cadeados terão 6 nomes. Note então que esse sistema com um cadeado para cada grupo de 6 pessoas funcionaria.

Suponha que 6 moradores estão com fome e sede e vão à geladeira. Agora, tome um subgrupo desses moradores de tamanho 5. Existe um cadeado que esse grupo não abre, pelo Lema. Nesse cadeado, há o nome de 6 pessoas e, como o cadeado não foi aberto, está o nome dos outros 6 moradores. Assim, a sexta pessoa que foi com este grupo à geladeira poderá abrir a geladeira pois o nome dela com certeza está escrito.

Sem entrar no mérito se vale a pena ou não fazer esse sistema por questão de praticidade. Na questão financeira: enquanto este artigo está sendo escrito, um cadeado custa 5,50 reais e uma cópia de chave custa 3,50 reais. Dessa forma, apenas para comprar os cadeados e as chaves, o custo total seria 12443,00 reais. Talvez valha a pena aprender Arduino[3].

2. O Problema dos Táxis

O problema dos táxis é um bom exemplo de como é importante ter atenção aos detalhes quando o assunto é estatística. Sendo assim, considere o seguinte problema (baseado em [1]):

Um táxi foi envolvido em um acidente no qual atropelou uma vítima durante a noite e, em seguida, disparou em fuga. Nesta pequena cidade há apenas duas companhias de táxi: P que possui apenas veículos pretos e a A que possui apenas veículos azuis. A companhia que possui os táxis pretos detém 85% dos táxis da cidade e a outra companhia possui os outros 15%.

Mas nem tudo está perdido! Houve uma testemunha nesse acidente e essa pessoa identificou o táxi como sendo da empresa A. Pois bem, vamos testá-la: colocaram a testemunha sob as mesmas circunstâncias do acidente e percebeu-se que a testemunha acerta $\frac{4}{5}$ das vezes, ou seja, tem uma taxa de acerto de 80%. A pergunta natural que surge é se a testemunha é confiável. Mas de uma maneira um pouco mais formal: qual é a probabilidade do táxi envolvido no acidente ser da empresa A sabendo que a testemunha o identificou como azul?

2.1 Solução

Para encontrar a probabilidade vamos fazer um pequeno teste de mesa. Suponha que simularam as condições da noite do acidente e fizeram a testemunha ver 500 carros, seguindo a proporção de táxis da cidade em questão. Ou seja, nesse teste havia 425 táxis pretos e 75 táxis azuis. Agora, a testemunha acerta 80% das vezes, então dos 425 táxis da empresa P, esta acertou 340 e disse que 85 eram azuis erroneamente. Essa porcentagem de acerto vale para os táxis da empresa A. Então dos 75 táxis, ela diz que 60 são azuis e erra os outros 15.

Para analisar, veja a Tabela 2:

Tabela 2: *Relação de acertos e erros da testemunha.*

	Azul	Preto
Testemunha	$60 + 85$	$340 + 15$
Valor Real	75	425

Na linha da testemunha foram colocados os dois valores, discriminados entre acertos e erros, respectivamente, de cordo com as cores que a testemunha o viu. Os valores reais podem ser vistos

[3]Arduino é um microcontrolador desenvolvido para que seja de fácil uso e desenvolvimento. Para aqueles que tiverem interesse: `https://www.arduino.cc/`

na linha de baixo.

Agora é possível calcular a porcentagem da testemunha ter acertado qual táxi fugiu do acidente. Note que dos 145 $(60 + 80)$ táxis que a testemunha diz serem azuis, 60, de fato, são. Dessa forma, perceba que a vítima acertou apenas $\frac{60}{145} = 41,3\%$. Ou seja, a testemunha NÃO pode ser decisiva para dizer se quem atropelou foi realmente um taxista da empresa A.

Referências

[1] The taxi-cab problem. Disponível em: https://mindyourdecisions.com/blog/2013/09/05/the-taxi-cab-problem/. Acessado em: 28/07/2017.