Uma Hidra Ordinária

Lucas Silva Sinzato Real*

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação da Universidade de São Paulo (ICMC-USP)
lucasreal@usp.br

Resumo

Nesse artigo, discutiremos como a ideia de infinito pode ajudar o semideus grego Hércules a matar uma Hidra com um padrão de regeneração bizarro, que aparentemente a faz crescer muito rápido. Entretanto, essa não é a Hidra clássica da mitologia grega (a famosa Hidra de Lerna), mas sim fruto da mente dos matemáticos Kirby e Paris [2]. Nessa discussão, faremos uma análise melhor do que é o infinito, e porquê manter nele algumas propriedades dos números naturais é relevante.

1. Um Vocabulário Importante

O problema que será apresentado nesse artigo não é difícil de ser compreendido, mas, para que sua explicação se torne didática, é conveniente abordá-lo com a linguagem da Teoria dos Grafos. Sendo assim, um **grafo** nada mais é do que um par $G = (V, A)$, em que V é um conjunto qualquer e A é um conjunto de pares não-ordenados de V. Os elementos de V são conhecidos como **vértices** do grafo e os elementos de A, que são da forma (a, b) com $a, b \in V$[1], são ditas ser **arestas** do grafo. Visando tornar a notação menos carregada, uma aresta (a, b) será identificada por ab ou ba.

Em geral, a maneira mais intutiva de se trabalhar com grafos é representar seus vértices em um plano e traçar curvas ligando-os conforme a existência das arestas. Em outras palavras, um grafo $G = (V, A)$ terá seus vértices representados como pontos de um plano e uma aresta ab, caso exista, será representada como um traço entre a e b. Um exemplo genérico de grafo está representado abaixo:

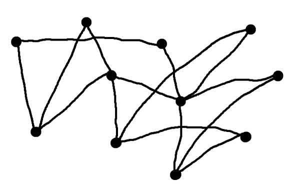

Figura 1: *Um grafo, em que os vértices correspondem aos círculos e as arestas correspondem aos traços*

Alguns grafos são tão naturais na matemática que recebem designações específicas. Um **caminho**, por exemplo, consiste em um grafo cujas arestas ligam vértices em sequência, em que o primeiro vértice e o último são ditos ser **pontas** desse caminho. Caso essas pontas também formem uma aresta, temos um grafo conhecido como **circuito**.

*Um agradecimento ao meu professor orientador Dr. Leandro Fiorini Aurichi, que me forneceu o contato com o elegante resultado que será apresentado.

[1]Como A é um conjunto de pares *não-ordenados* de V, segue que $(a, b) = (b, a)$ para todo par $(a, b) \in A$.

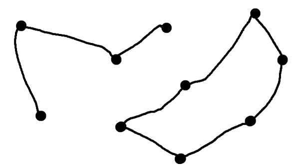

Figura 2: *À esquerda, temos um exemplo de caminho com* 4 *vértices e, à direita, um circuito com* 6 *vértices.*

Destacamos que, na Figura 1, é possível encontrar um subconjunto de vértices do grafo que, com certas arestas desse grafo, consiste em um circuito. Ou seja, o grafo da Figura 1 possui um circuito como **subgrafo**. Quando um grafo não possui circuitos como subgrafos, dizemos que ele é uma **árvore**, como exemplificado a seguir:

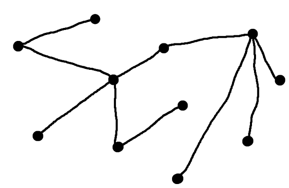

Figura 3: *Esse grafo é uma árvore, pois não possui circuitos como subgrafo*

A principal propriedade que utilizaremos sobre as árvores neste artigo é que elas podem ser estratificadas. Isto é, fixado um vértice r da árvore, que será designado **raiz**, podemos esboçar o grafo como uma espécie de "árvore genealógica". Por exemplo, nomeamos os vértices do grafo da Figura 3 e fizemos sua estratiticação tomando o vértice r como raiz:

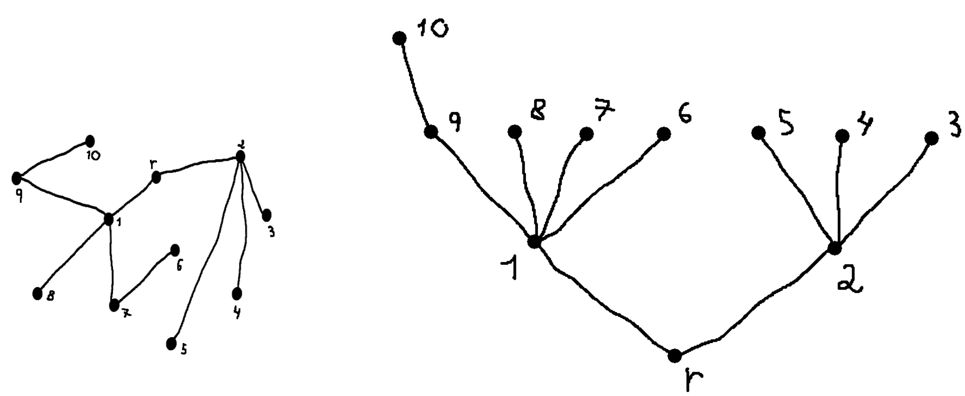

Figura 4: *À esquerda, temos o grafo da Figura 3 e, à direita, uma possível estratificação.*

Uma vez que a estratificação de uma árvore é muito similar a uma árvore genealógica, somos motivados a estabelecer algumas definições convenientes. Por exemplo, sempre que um vértice v

é adjacente a um vértice u posicionado em uma faixa inferior da árvore, dizemos que v é **filho** de u (por esse motivo, u é dito ser **pai** de v). Na Figura 4, por exemplo, os vértices 1 e 2 são filhos de r. Os vértices $3, 4$ e 5 são filhos de 2, bem como $6, 7, 8, 9$ são filhos de 1. Finalmente, 10 é filho de 9. Observe que $10, 8, 7, 6, 5, 4$ e 3 são vértices que não possuem filhos. Por essa razão, são conhecidos como **folhas** da árvore. Feita essa introdução botânica, podemos por as mãos na massa.

2. Releitura do Segundo Trabalho

O herói Hércules foi um semideus grego e, como todo filho bastardo de Zeus, foi perseguido desde a infância pela deusa Hera. Uma vez adulto, Hércules se casou e, num acesso de loucura provocado pelos poderes de Hera, matou sua esposa e seus filhos. Como forma de penitência religiosa, o Oráculo de Delfos determinou que o herói se entregasse como servo para o rei da cidade de Micenas, que designou a ele doze trabalhos para serem realizados. Antes que esse se torne um artigo de mitologia, convém destacar apenas algumas das missões, como limpar um estábulo e caçar algumas aves. Entretanto, o desafio de Hércules que nos interessa é o segundo de sua lista: matar uma hidra. Nessa história, uma hidra corresponde a uma serpente de noves cabeças, de maneira que, para matá-la, Hércules deve cortar todas essas cabeças. Para um semideus grego, isso deveria ser algo fácil. Porém, o pescoço associado a cada cabeça do monstro tem uma propriedade regenerativa: no local do corte de uma cabeça, surgem duas novas.

Como leitor de um artigo de matemática, você pode estar se perguntando que equação Hércules vai utilizar para cumprir sua missão. Infelizmente, o herói apela para o misticismo e descobre que, ao cicatrizar com fogo um corte, a regeneração de uma cabeça da hidra é bloqueada. Assim, Hércules só precisou fazer os cortes das cabeças e cicatrizá-los logo em seguida[2].

Agora, suponhamos que Hera, telespectadora desses trabalhos, julgou que a hidra fosse fraca demais para o herói. Visando aumentar a dificuldade do desafio, a deusa criou uma nova hidra (que, a partir de agora, será chamada de Hidra), retirando a capacidade de cicatrização do monstro. Mais do que isso, Hera também dotou a Hidra de um padrão bizarro de regeneração após o corte de uma de suas cabeças. Para explicá-lo, encararemos a Hidra como uma árvore, em que as cabeças do monstro são as folhas do grafo e os demais vértices constituem bifurcações em seu corpo. Nesse contexto, um **corte** de Hércules consistirá na remoção de uma aresta cujo um dos extremos é uma folha do grafo. Vejamos um exemplo da representação de uma Hidra como árvore: Agora, descreveremos o processo de regeneração da Hidra após um corte, sendo G a

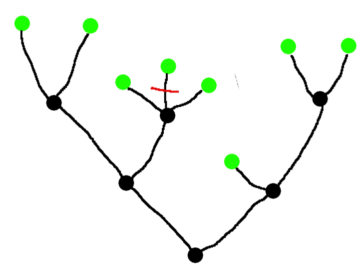

Figura 5: *Representação da Hidra como uma árvore. Os vértices em verde são as folhas do grafo, simbolizando as cabeças do monstro. O traço vermelho representa um possível corte de Hércules.*

[2]Para não parecer que esse trabalho de Hércules foi moleza, convém fazer a ressalva de que havia uma cabeça imortal entre as nove, isto é, que não poderia ser cortada. Ao invés de decepá-la, Hércules conseguiu enterrar essa cabeça.

árvore que a representa. Suponhamos que o $n-$ésimo corte de Hércules seja feito em uma aresta uv de G, na qual u é a extremidade que representa uma das cabeças do animal. Seja w o vértice pai de v (caso este vértice não exista, isto é, v é a raiz do grafo, a Hidra não se regenera). Sobre w, adicionaremos n cópias de v e de seus filhos com exceção de u. Portanto, supondo que Hércules fará seu primeiro corte na Hidra da Figura 5 através do traço vermelho esboçado, a Hidra irá se regenerar de acordo com o seguinte padrão:

Figura 6: *Regeneração da Hidra da Figura 5 após o corte de Hércules indicado em vermelho. Observe que, em w, foi adicionada apenas uma cópia v' de v com seus filhos (exceto u), pois Hércules deu apenas seu primeiro corte. Se esse já fosse um $n-$ésimo corte do semideus, seriam adicionadas n cópias.*

Com esse novo modelo de Hidra, Hércules aparentemente terá um trabalho maior para fazer, ainda mais sem o auxílio do fogo. Contudo, os matemáticos Kirby e Paris, idealizadores desse novo padrão de regeneração, conseguiram garantir que seu sofrimento não será eterno, uma vez que provaram o seguinte resultado:

Teorema 2.1 (Teorema da Hidra)**.** *Hércules mata a Hidra com um número finito de cortes, isto é, após um número finito de cortes sobre a Hidra, o grafo que a representa se reduz a um único vértice. Mais do que isso, qualquer sequência de cortes que o herói fizer culminará na destruição do monstro.*

3. Uma Ideia Natural

Embora muito surpreendente, a demonstração do Teorema da Hidra se baseia em uma ideia bem simples, mas que necessita de uma aritmética entre conjuntos infinitos. Utilizando os números naturais, contudo, podemos intuir a prova. Vamos escolher n um número natural qualquer. Atribuiremos um valor numérico para cada Hidra H_k gerada pelo $k-$ésimo corte de Hércules sobre uma Hidra inicial H_0, com base em valores atribuidos aos vértices de seu grafo. Essa valoração sobre os vértices se dará recursivamente do seguinte modo: cada folha w de H_k terá valor $f(w) = 0$ e cada vértice v que não é uma folha de H_k terá valor $f(v) = \sum_{u \in S(v)} n^{f(u)}$, em que $S(v)$ é o conjunto dos vértices filhos de v e $f(u)$ é o valor atribuido ao vértice u. Nesse sentido, o valor que daremos a H_k será o valor de sua raiz. Assim, a Hidra da Figura 6 possui valor $n^{3 \cdot n^2} + n^{n^2+1}$, conforme podemos observar pelo esboço da Figura 7.

Como não existe uma sequência infinita estritamente decrescente entre os números naturais, o resultado de Kirby e Paris pode ser obtido se mostrarmos que o valor de uma Hidra diminui sempre que ela é cortada. Será que isso é verdade mediante nossa valoração com base no natural n? Para realizarmos essa discussão, sejam H_k uma Hidra e H_{k+1} uma Hidra obtida a partir de um corte da primeira, que, por sua vez, foi obtida através de k cortes de um monstro H_0. Digamos que o corte que origina H_{k+1} seja feito em uma folha v de H_k. Denotando por u o pai de v e por w o pai de u, temos que o valor de w pode ser dado por $a + n^{f(u)}$ para algum natural a escrito como soma

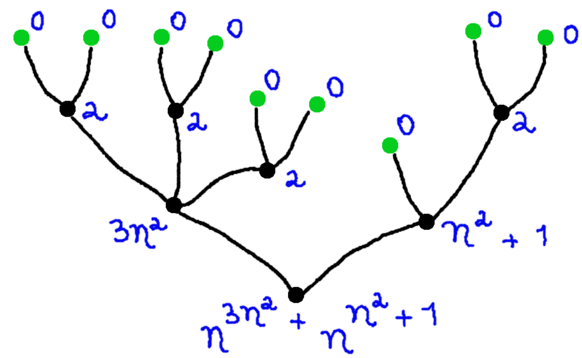

Figura 7: *Atribuição de valores (em azul) aos vértices da Hidra obtida na Figura 6, até a obtenção do valor da Hidra, que consiste no valor de sua raiz.*

de potências de base n. Após o corte, teremos que o valor de w será dado por $a + (k+1) \cdot n^{f(u)-1}$. Caso $k+1 < n$, temos que o valor de w decresce. Mas, observe que há uma certa monotonicidade entre o crescimento do valor de um vértice e o valor de seus filhos: ou seja, se o valor de um vértice decresce, o valor de seu pai também decresce, consequentemente. Portanto, com a redução do valor de w, temos que o valor de H_{k+1} também decresce, como gostaríamos.

Contudo, pode ocorrer de $k+1 \geq n$, invalidando esse argumento. Seria conveniente, portanto, se em nossa valoração das Hidras utilizássemos uma base distinta de n, com valor maior que o de qualquer número natural. Seria esse um valor do tipo *infinito*? Aliás, o que seria comparar infinitos com números naturais? Como devemos somá-los, multiplicá-los e exponenciá-los? Veremos que essas operações, bem como outras caracteríticas dos números naturais, podem ser preservadas para certos tipos de conjuntos, mas com o custo de algumas complicações e perda de algumas propriedades.

4. O Infinito é logo ali

Ou seja, para que o argumento da Seção 3 seja válido, gostaríamos de definir objetos matemáticos maiores do que qualquer número natural, mas, ainda assim, que não houvesse sequências infinitas estritamente decrescentes dessas estruturas. Para tanto, iremos abstrair a noção de ordem entre os números naturais. Assim, começamos por identicar o $0 \in \mathbb{N}$ como o conjunto $\emptyset$. Então, escrevemos $1 = \{0\} = \{\emptyset\}$, $2 = \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $3 = \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$ e assim sucessivamente, isto é, $n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sobre essa construção, destacamos duas características muito importantes:

1. Dados $n, m \in \mathbb{N}$, temos que $n \leq m$ se, e somente se, $n = m$ ou $n \in m$. Em outras palavras, a relação de pertinência ou igualdade configura uma ordem sobre $\mathbb{N}$. Além disso, como todo subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento, dizemos que $\mathbb{N}$ é **bem ordenado** com relação à $\in$[3]. É por conta dessa propriedade que não existem sequências infinitas estritamente decrescentes entre números naturais.

2. Dado $m \in \mathbb{N}$, temos que, se $n \in m$, então $n \subset m$. Logo, m é um conjunto **transitivo**, isto é, todos os seus elementos são subconjuntos (mas nem todo subconjunto de m é um de seus

[3] A partir de agora, sempre que dissermos que $\in$ é uma relação de ordem, estaremos nos referindo à relação de pertinência ou igualdade: dados A e B conjuntos, A é menor ou igual a B (isto é, $A \leq B$) se, e somente se, $A \in B$ ou $A = B$

elementos, pois não podemos ter $m \in m$).

Com respeito a essas duas propriedades, dizemos que um conjunto α é um **ordinal** se é transitivo e bem ordenado com a relação $\in$, isto é, todo subconjunto não vazio de α possui um menor elemento com relaçao à $\in$. Ou seja, todos os números naturais, como definidos acima, são ordinais. Além disso, o próprio conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, que agora será representado por ω, é um ordinal. Será que existem outros?

Ora, observe que $\omega + 1 = \{0, 1, 2, \dots, \omega\} = \omega \cup \{\omega\}$ é transitivo. Do mesmo modo, é bem ordenado com relação à $\in$. Diferentemente de ω, $\omega + 1$ possui um elemento que é maior que qualquer número natural (ω, a saber), como podemos observar pelo seguinte diagrama:

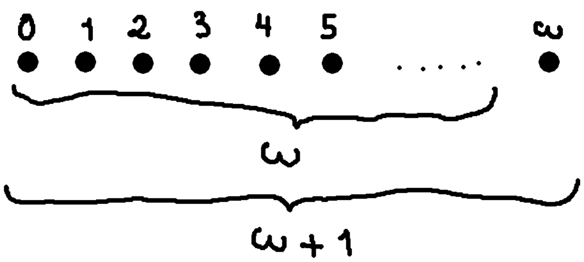

Figura 8: *Todos os círculos destacados são os elementos de $\omega + 1$, que estão representados do menor para o maior se lidos da esquerda para a direita. Assim, ω é o maior elemento de $\omega + 1$. Observe que ω, como conjunto, não possui maior elemento.*

Uma vez familiarizados com $\omega + 1$, podemos perceber que $\omega + 2 = \{0, 1, 2, \dots, \omega, \omega + 1\} = (\omega + 1) \cup \{\omega + 1\}$ é também um ordinal, que possui um maior elemento e que possui dois elementos maiores do que todos os números naturais. Além disso, $\omega + 1 < \omega + 2$, pois $\omega + 1 \in \omega + 2$. Com essa notação tendenciosa, somos motivados a definir a **soma de ordinais** da seguinte maneira: dados α e β dois ordinais, $\alpha + \beta$ consiste no ordinal criado unindo-se a α uma cópia de β e definindo que todos os elementos de β são maiores que os elementos de α[4]. Observe então que $\omega + 1$ e $\omega + 2$ atendem a essa definição e $\omega + \omega$, por sua vez, pode ser representado pelo diagrama da Figura 9.

Como é de se desejar de uma operação de soma, a soma entre ordinais é associativa, isto é, dados α, β e γ ordinais, tem-se que $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. Além disso, podemos estudar como essa soma se comporta entre os ordinais. Assim, dados α, β e γ ordinais com $\beta < \gamma$, temos que a soma à esquerda preserva a desigualdade, isto é $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$. Contudo, a comutatividade da operação é perdida. Afinal, $1 + \omega$, por exemplo, consiste na união de 1 com uma cópia de ω pondo 1 como menor que todos os elementos de ω. Entretanto, essa nada mais é do que uma cópia disfarçada dos números naturais com sua ordem usual[5]. Ou seja, $1 + \omega = \omega$, enquanto que $\omega \neq \omega + 1$. Como outra propriedade que sofre uma ligeira alteração, temos que, dados α, β e γ ordinais com $\alpha < \beta$, a soma de γ à direita pode não preservar a desigualdade, de modo que devemos ter $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. Observe que essa igualdade pode ser, de fato, atingida: 1 e 2 são ordinais com $1 < 2$, mas $1 + \omega = 2 + \omega = \omega$.

[4] A definição de $\alpha + \beta$, como feita aqui, não está escrita de modo rigoroso, mas permite uma boa intuição de como ela é realizada. Se estiver interessado nos detalhes mais técnicos, a leitura de [1] é recomendada.

[5] Por indução sobre os números naturais, podemos verificar a seguinte afirmação: dado $n \in \omega$, tem-se que $n + \omega = \omega$.

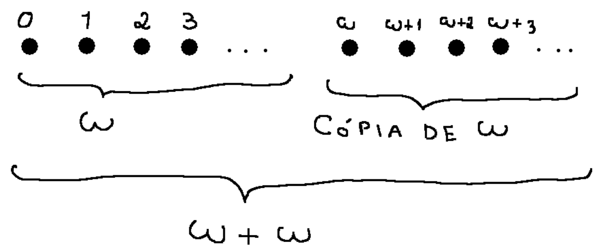

Figura 9: *Todos os círculos destacados são os elementos de $\omega + \omega$, que estão representados do menor para o maior se lidos da esquerda para a direita. Assim, $\{\omega, \omega + 1, \omega + 2, \dots\}$ é uma cópia de ω em que todos os seus elementos são maiores que qualquer número natural.*

Ainda assim, nem tudo está perdido e podemos intuir muito bem uma noção de multiplicação de maneira similar. Visando aproveitar a ideia da notação $\omega + \omega$, esse conjunto poderá ser escrito agora como $\omega \cdot 2$. Como podemos imaginar, define-se $\omega \cdot 3 = \omega + \omega + \omega$ e seu diagrama pode ser dado por:

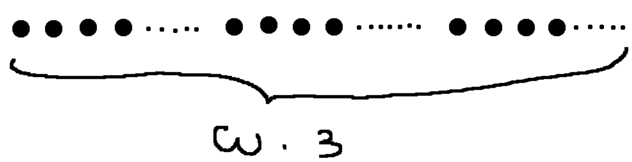

Figura 10: *Todos os círculos destacados são os elementos de $\omega \cdot 3$, que estão representados do menor para o maior se lidos da esquerda para a direita. Assim, $\omega \cdot 3$ é formado por três cópias de ω.*

De maneira mais geral, dados α e β ordinais, definimos o **produto** $\alpha \cdot \beta$ pondo, para cada elemento de β, uma cópia de α e, dados $b_1, b_2 \in \beta$ com $b_1 < b_2$, definimos que os valores da "b_1-ésima" cópia são todos menores que os da "b_2-ésima" cópia . Com isso, $\omega \cdot \omega$ consiste em uma cópia de ω para cada número natural, como intuido pelo seguinte diagrama:

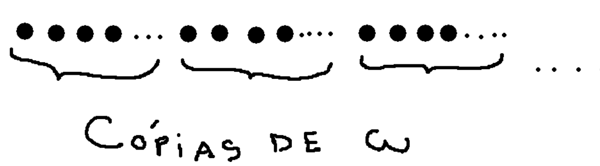

Figura 11: *Todos os círculos destacados são os elementos de $\omega \cdot \omega$, que estão representados do menor para o maior se lidos da esquerda para a direita. Como comentado, $\omega \cdot \omega$ consiste em uma cópia de ω para cada número natural.*

Bem como ocorre com a soma de ordinais, o produto entre ordinais possui propriedades desejáveis e algumas inconveniências. Por exemplo, essa multiplicação é associativa, isto é, dados α, β e ω ordinais, tem-se que $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$. Além disso, se $\beta < \gamma$ e $0 < \alpha$, então $\alpha \cdot \beta < \alpha \cdot \gamma$. Contudo, esse produto também não é uma operação comutativa. Por exemplo, $2 \cdot \omega$ consiste em uma cópia do ordinal 2 para cada número natural, resultando em uma cópia de ω. Logo, $2 \cdot \omega = \omega$ e, como sabemos pela Figura 9, $\omega \neq \omega \cdot 2$. Ou seja, $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$.

Ainda assim, a soma e a multiplicação de ordinais são operações que se comportam relativamente bem entre si. Por exemplo, dados α, β e γ ordinais, sabemos que $\alpha \cdot (\beta + \gamma)$ corresponde na atribuição de uma cópia de α para cada elemento de $\beta + \gamma$. Podemos pensar nisso como a atribuição de uma cópia de α para cada elemento de β e a união com uma cópia de α para cada elemento de γ, pondo artificalmente que todas as cópias relacionadas aos elementos de γ possuem elementos maiores que as cópias relacionadas aos elementos de β. Em outras palavras, vale a distributiva à esquerda, isto é, $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$. Entretanto, a distributiva à direita não é válida, pois $(\omega + 1) \cdot 2 = (\omega + 1) + (\omega + 1) = \omega + (1 + \omega) + 1 = \omega \cdot 2 + 1 \neq \omega \cdot 2 + 2$, por exemplo.

Finalmente, o ordinal $\omega \cdot \omega$ será escrito como ω^2, induzindo-nos a definir a exponenciação entre ordinais. Assim, dados α e β ordinais, se pudermos escrever $\beta = \gamma + 1$ para algum outro ordinal γ, então definimos recursivamente $\alpha^\beta = \alpha^\gamma \cdot \alpha$. Se não, escrevemos $\alpha^\beta = \bigcup_{\gamma \in \beta} \alpha^\gamma$. Infelizmente, a exponenciação entre ordinais é ligeiramente mais difícil de ser representada como um diagrama. Contudo, o link `http://www.madore.org/~david/math/drawordinals` o possui a representação de diversas exponenciais de ordinais, como o ω^ω, representado abaixo.

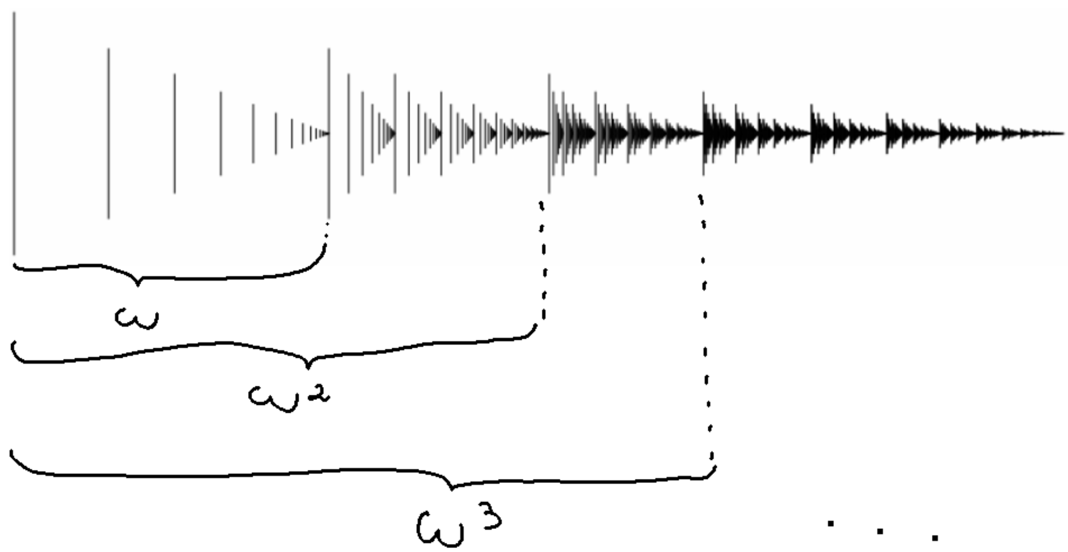

Figura 12: *Todos os traços destacados são os elementos de ω^ω, que estão representados do menor para o maior se lidos da esquerda para a direita. Observe que não podemos escrever $\omega = \gamma + 1$ para outro ordinal γ, de maneira que ω^ω consiste em um processo limite da sequência de exponenciações $\omega^2, \omega^3, \omega^4, \ldots$*

Novamente, dentre as propriedades desejáveis dessa exponenciação de ordinais, obtemos que, se α, β e γ são ordinais tais que $1 < \alpha$ e $\beta < \gamma$, então $\alpha^\beta < \alpha^\gamma$. Com isso, finalizamos as generalizações das operações básicas entre números naturais e podemos colher alguns resultados que eram extremamente funcionais entre os elementos de $\mathbb{N}$.

Por exemplo, você já deve ter ouvido falar que todo número natural possui uma única decomposição em determinada base numérica. Na base usual, base 10, por exemplo, o número 666 se escreve como $666 = 10^2 \cdot 6 + 10^1 \cdot 6 + 10^0 \cdot 6$. Para ordinais, as operações definidas também permitem esse tipo de decomposição:

Teorema 4.1 (Forma Normal de Cantor [1]). *Sejam α, β ordinais tais que $1 < \alpha$ e $\alpha \leq \beta$. Então, existe um único natural k, únicos ordinais $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_k$ e únicos ordinais $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_k$ com $\gamma_i < \gamma_{i-1}$ e $0 < \delta_i < \alpha$ para todo $i \leq k$ tais que $\beta = \alpha^{\gamma_1} \cdot \delta_1 + \alpha^{\gamma_2} \cdot \delta_2 + ... + \alpha^{\gamma_k} \cdot \delta_k$. Em outras palavras, existe uma única maneira de escrever β como soma de potências de α.*

Como veremos a seguir, a Forma Normal de Cantor é a espada que precisávamos para enfrentar a Hidra do problema!

5. Não é um bicho de 7 cabeças

Nesta seção, demonstraremos como Hércules consegue matar todas as Hydras com o padrão de regeneração descrito na Seção 3. Primeiramente, convém definir uma *estratégia de Hércules*. A esse termo associamos uma sequência $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de árvores, em que cada H_k representa a Hidra obtida após Hércules realizar um $k-$ésimo corte em um Hidra H_0.

Além disso, atribuiremos a cada vértice v de uma Hidra H um valor ordinal $f_H(v)$ do seguinte modo:

$$f_H(v) = \begin{cases} 0, & \text{se } v \text{ é uma folha de } H \\ \omega^{f_H(u_1)} \cdot \delta_1 + \omega^{f_H(u_2)} \cdot \delta_2 + ... + \omega^{f_H(u_k)} \cdot \delta_k, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Nessa notação, em que $u_i \neq u_j$ para $i \neq j$, cada u_i para $i \in \{1, 2, ...k\}$ é filho de v, $\delta_i \prec \omega$ para todo $i \in \{1, 2, ..., k\}$ e $f_H(u_1) > f_H(u_2) > .... > f_H(u_k)$.[6] Ou seja, estamos escrevendo cada vértice v em uma Forma Normal de Cantor para a base ω, em que os expoentes da expansão correspondem aos valores de seus filhos e os coeficientes são os números naturais que representam a quantidade de filhos de v que possuem aquele valor a ele associado.

Assim, ao denotarmos $f(H)$ o valor de uma Hidra e definí-lo como o valor $f_H(r)$ de sua raiz r, podemos calcular o valor da Hidra dada pela Figura 7 como

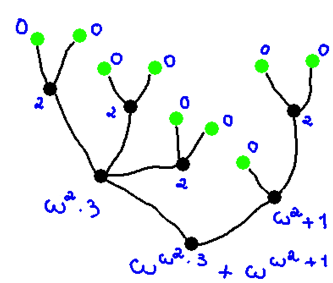

Figura 13: *Valoração da Hidra da Figura 7 utilizando a base ω. Nesse caso, o valor da Hidra é definido como o valor de sua raiz, a saber, $\omega^{\omega^2 \cdot 3} + \omega^{\omega^2+1}$.*

Novamente, bem como no estudo feito com números naturais na Seção 3, o modo como fizemos essa valoração sobre a Hidra provoca uma certa dependência estritamente monótona dos

[6]Devemos observar que esse procedimento a ser realizado recursivamente está bem definido pelo fato da multiplicação ordinal ser distributiva com a soma, dando origem a cada δ_i e permitindo que cada expoente $f_H(u_i)$ componha a expressão apenas uma vez.

valores de um vértice como função dos valores de seus filhos. Mais formalmente, temos a seguinte propriedade:

Lema 5.1. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e w um vértice da Hidra tal que $f_{H_{n+1}}(w) < f_{H_n}(w)$. Se z é o pai de w, então $f_{H_{n+1}}(z) < f_{H_n}(z)$.*

Demonstração. Observe que é possível fazer a seguinte expressão:

$$f_{H_{n+1}}(z) = \alpha + \omega^{f_{H_n}(w)} + \beta,$$

em que α e β são somatórios de potências de ω, cujos expoentes são vértices não alterados pelo corte de Hércules. Pelo fato de $f_{H_{n+1}}(w) < f_{H_n}(w)$ e, assim, $\omega^{f_{H_{n+1}}(w)} < \omega^{f_{H_n}(w)}$, garantimos que

$$\alpha + \omega^{f_{H_{n+1}}(w)} < \alpha + \omega^{f_{H_n}(w)}$$

Por sua vez, ao somarmos β à direita nos dois lados da expressão, concluimos que

$$\alpha + \omega^{f_{H_{n+1}}(w)} + \beta \leq \alpha + \omega^{f_{H_n}(w)} + \beta$$

Resta-nos, portanto, argumentar porquê essa desigualdade é estrita. Se isso não ocorresse, poderíamos ter $\alpha + \omega^{f_{H_{n+1}}(w)} + \beta = \alpha + \omega^{f_{H_n}(w)} + \beta$. Nessa ocasião, cada lado da igualdade daria origem a uma Forma Normal de Cantor para o ordinal $f(H_{n+1}) = f(H_n)$. Entretanto, o coeficiente de $\omega^{f_{H_{n+1}}(w)}$ no lado direito da igualdade, caso existisse, seria dado por δ. Assim, o coeficiente de $\omega^{f_{H_{n+1}}(w)}$ será $\delta + 1$, contradizendo a unicidade da Forma Normal de Cantor. □

Com o auxílio do Lema 5.1 (e utilizando a ideia de sua prova mais uma vez), conseguimos fundamentar a demonstração do Teorema 2.1, que agora pode ser enunciado com uma linguagem mais precisa:

Teorema 5.1 (Teorema da Hidra (Reformulado))**.** *Seja $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma estratégia de Hércules. Nesse contexto, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $f(H_{n+1}) < f(H_n)$, caso H_n não seja um grafo de um único vértice. Desse modo, como não existe uma sequência infinita estritamente decrescente de ordinais, o valor da Hidra deve se reduzir a 0 em algum $n-$ésimo corte de Hércules, para $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja H_n uma Hidra não morta, isto é, que não é formada apenas por um único vértice, possibilitando cortes de Hércules. Seja H_{n+1} a Hidra obtida após o corte realizado pelo herói em uma folha v. Assim, considerando u o pai de v, temos $f_{H_n}(u) = f_{H_{n+1}}(u) + 1$, mostrando que $f_{H_{n+1}}(u) < f_{H_n}(u)$. Com isso, por uma das propriedades da exponenciação ordinal discutida, segue que $\omega^{f_{H_{n+1}}(u)} < \omega^{f_{H_n}(u)}$. Em particular, $\omega^{f_{H_{n+1}}(u)} \cdot \lambda < \omega^{f_{H_n}(u)}$ para todo $\lambda < \omega$ (isto é, para todo número natural λ). Caso u seja a raiz de H_n, finalizamos a demonstração. Caso contrário, seja w o pai de u. Consideremos o valor de w em H_n como:

$$f_{H_n}(w) = \alpha + \omega^{f_{H_n}(u)} + \beta$$

Nessa escrita, α e β são somas de potências de ω, cujos expoentes são os valores dos demais filhos de w que não u. Convém destacar ainda que essa pode não ser a Forma Normal de Cantor para $f_{H_n}(w)$, pois não sabemos se existem outros filhos de w com valores iguais aos de u. De qualquer maneira, esses filhos que compõem os expoentes de α e β não são alterados pelo corte de Hércules, de modo que, pelo padrão de regeneração da Hidra,

$$f_{H_{n+1}}(w) = \alpha + \omega^{f_{H_{n+1}}(u)} \cdot (n+1) + \beta$$

Afirmamos agora que $f_{H_{n+1}}(w) < f_{H_n}(w)$. Pelo fato de $\omega^{f_{H_{n+1}}(u)} \cdot (n+1) < \omega^{f_{H_n}(u)}$, garantimos que

$$\alpha + \omega^{f_{H_{n+1}}(u)} \cdot (n+1) < \alpha + \omega^{f_{H_n}(u)}$$

Por sua vez, ao somarmos β à direita nos dois lados dessa desigualdade, sabemos que:

$$\alpha + \omega^{f_{H_{n+1}}(u)} \cdot (n+1) + \beta \leq \alpha + \omega^{f_{H_n}(u)} + \beta$$

Assim, devemos apenas argumentar porquê essa desigualdade é estrita. Caso ela fosse uma igualdade, teríamos que ambos os lados da expressão caracterizariam uma Forma Normal de Cantor para o ordinal $f_{H_{n+1}}(w) = f_{H_n}(w)$. Contudo, se no lado direito dessa expressão o coeficiente de $\omega^{f_{H_{n+1}}(u)}$, caso existisse, fosse δ, no lado esquerdo esse coeficiente seria $\delta + n + 1$, o que contradiz a unicidade representativa da Forma Normal de Cantor. Logo, temos $f_{H_{n+1}}(w) < f_{H_n}(w)$. Agora, dado z o pai de w, o Lema 5.1 nos diz que $f_{H_{n+1}}(z) < f_{H_n}(z)$ e, aplicando esse enunciado recursivamente, conclui-se que essa desigualdade é válida para o pai de z, para o pai do pai de z e assim segue até a raiz do grafo, de onde concluímos que $f(H_{n+1}) < f(H_n)$, como queríamos. $\square$

6. Considerações Finais

Embora a demonstração do Teorema da Hidra seja um pouco técnica, o seu resultado continua sendo surpreendente. Para intensificar ainda mais a grandeza desse enunciado, o link `http://math.andrej.com/2008/02/02/the-hydra-game/` fornece um programa em Java que simula o padrão de crescimento da Hidra e, com poucos cortes, já é possível se convencer de que a regeneração do monstro toma proporções absurdamente grandes. Assim, é ainda mais difícil ter esperanças na vitória de Hércules.

No mesmo artigo em que apresentaram esse problema, Kirby e Paris discutem que a conclusão do Teorema 5.1 não poderia ser obtida apenas com a teoria desenvolvida sobre os axiomas de Peano, que sustentam a aritmética clássica. Assim, uma estrutura como a dos ordinais é necessária para ajudar Hércules com seu trabalho. Contudo, as propriedades dos ordinais e de suas operações foram abordadas aqui de maneira muito ingênua e com pouco (ou nenhum) rigor, com caráter puramente motivacional. Se a sua curiosidade foi atiçada por esse assunto, é sugerida a leitura das notas de aula de Aplicações de Teoria dos Conjuntos do professor Leandro Aurichi (disponível em `https://sites.icmc.usp.br/aurichi/lib/exe/fetch.php?media=curso:conjuntos2018.pdf`) e, posteriormente, a leitura de [1].

Referências

[1] Winfried Just and Martin Weese. *Discovering Modern Set Theory. I The Basics*. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, 1995.

[2] Laurie Kirby and Jeff Paris. Accessible Independence Results for Peano Arithmetic. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 14(4):285–293, 1982.