Homens de categoria

Gabriel Longatto Clemente

Universidade Federal de São Carlos
clemente@dm.ufscar.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos algumas noções acerca das estruturas matemáticas. Mostraremos a generalidade e a naturalidade destas através de vários exemplos. Em particular, estudaremos a ideia matemática de grupo a fim de termos alguns exemplos palpáveis e de compreendermos algumas das ideias de Jean Piaget sobre as cognições humanas. Depois disso, vamos aumentar nosso campo de visão mostrando estruturas cada vez mais gerais. Nossa meta, ao final, é a compreensão das categorias matemáticas. Nesta parte mostraremos também como as estruturas explicadas anteriormente podem ser escritas a partir de outras mais gerais.

1. Introdução

Nascido a 9 de agosto de 1896 na cidade de Neuchâtel, Suíça, e falecido a 16 de setembro de 1980 em Genebra, também Suíça, *Jean William Fritz Piaget* foi um doutor em Biologia pela Universidade de Neuchâtel que forneceu várias contribuições para as áreas de **Educação**, **Epistemologia** e **Psicologia**.

Figura 1.1: Jean William Fritz Piaget *(1896 - 1980).*

Devido à extensão e à qualidade de sua obra, Jean Piaget foi chamado por muitos de *Einstein da Psicologia*. Para se ter uma ideia, Piaget publicou mais de setenta livros. Alguns títulos por ele publicados são: *A Linguagem e o Pensamento da Criança* (1923), *O Juízo Moral na Criança* (1932) e *Seis Estudos de Psicologia* (1964).

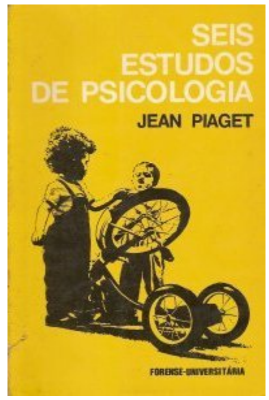

Figura 1.2: Seis Estudos de Psicologia *(1964).*

Ele mesclou as áreas de Epistemologia e de Psicologia produzindo um novo campo de estudo: a *Epistemologia Genética*. A palavra *genética* nesta expressão deve ser entendida como sinônimo de *gênese*, isto é, *origem*. Portanto, *Epistemologia Genética* é a ciência que estuda a origem do conhecimento no humano. Assim sendo, a pergunta fundamental para Jean Piaget consistiu em um problema epistemológico-psicológico: *em um indivíduo, como se dá a passagem de um estado do conhecimento para um estado de conhecimento superior?* Em outras palavras, *como os indivíduos constroem o conhecimento?*

Por outro lado, apesar do que muitos acreditam, Jean Piaget não foi um estudioso da Educação. Na verdade, ele explicou que seus trabalhos poderiam ajudar os pedagogos a entenderem os processos cognitivos dos jovens e, desta forma, aqueles poderiam pensar a Educação a partir de um outro ponto de vista.

Uma vez que as crianças são as que mais evidentemente constroem conhecimento, o suíço em questão dedicou-se a estudá-las a fim de responder sua pergunta de pesquisa explicada anteriormente. A teoria mais comumente conhecida deste autor é a *Teoria dos Estágios do Desenvolvimento* que se encontra resumida em seu livro *Seis Estudos de Psicologia* (1964). Esta teoria diz que existem três etapas principais pelas quais os seres humanos passam em seu desenvolvimento cognitivo: o *Estágio Sensor-Motor*, próprio das crianças entre zero e dois anos; o *Estágio Pré-operatório*, próprio das crianças entre dois e sete anos; e o *Estágio Operatório*, próprio das crianças entre sete e doze anos. Ainda, Piaget faz uma distinção entre duas fases desta última etapa: o *Estágio Operatório Concreto* e o *Estágio Operatório Formal*. Tais etapas são caracterizadas por relações afetivas, sociais e com o mundo bastante próprias.

Obviamente, um tema correlato aos estágios do desenvolvimento é a transição de um destes para outro consecutivo. Nesta discussão Piaget tentou identificar processos que estivessem ao alcance de uma fase do desenvolvimento mas que não estivessem ao alcance da fase do desenvolvimento estritamente anterior. Por exemplo, ele nos diz que o pensamento infantil só se torna um pensamento lógico através da organização de sistemas de operações, que obedecem às leis de conjuntos comuns. Estas leis são:

- duas operações de um conjunto podem ser compostas entre si resultando em uma operação do mesmo conjunto;
- toda operação pode ser invertida;
- a operação direta e sua inversa dão uma operação nula ou idêntica, quando operadas;
- as operações podem ser associadas entre si de todas as maneiras.

Neste momento, o autor nos diz que esta estrutura das operações cognitivas é aquela que os matemáticos chamam de *grupos*. Vamos agora deixar esta reflexão um pouco de lado com a intenção de melhor entendê-la depois. Respondamos primeiro à pergunta natural que emerge daqui: o que o termo *grupo* significa para os matemáticos? Depois disso, além de voltarmos à discussão iniciada aqui, veremos outras estruturas matemáticas que ajudam a esclarecer as ideias de Piaget.

2. Matemáticos e os grupos

Nesta seção vamos seguir o gancho que demos na Introdução e entender o que um matemático compreende pelo termo *grupo*. Para isso, vamos começar nossa discussão com um exemplo bastante visual e representativo. Seja T o triângulo equilátero com baricentro P e com vértices A, B e C esquematizado na Figura 2.1. Em geral, o *baricentro* de um triângulo é o ponto de encontro de suas três medianas que, por sua vez, são as retas que passam pelos vértices e pelos pontos médios dos lados opostos a estes.

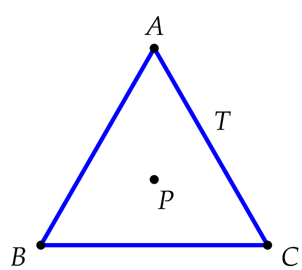

Figura 2.1

Uma *simetria*, a grosso modo, consiste em uma regra de disposição de duas figuras idênticas que se correspondem ponto a ponto. Basicamente, uma simetria é a movimentação de um objeto cujas formas são preservadas. Existem três tipos de simetrias planas: as *reflexões*, as *rotações* e as *translações*.

No caso de um triângulo equilátero, dois tipos de simetrias são mais interessantes para serem avaliados. Estes são: as reflexões sobre as medianas relativas a cada lado do triângulo, e as rotações em torno do baricentro por 0° (0 radiano), 120° ($\frac{2\pi}{3}$ radianos) e 240° ($\frac{4\pi}{3}$ radianos). Com o propósito de melhor entendermos a ação e a importância destas simetrias em um triângulo equilátero, vamos a seguir detalhar e esquematizar cada uma delas para o triângulo equilátero T cujos vértices estão demarcados pelas letras A, B e C. Então:

- Denotamos por r_0 a rotação em torno do baricentro por 0 radiano. Vide Figura 2.2. Esta rotação deixa todos os vértices imóveis. Isto é, os vértices A, B e C permanecem em seus lugares de origem.

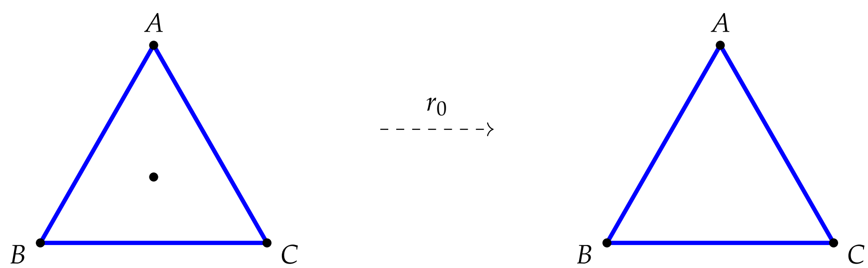

Figura 2.2

- Denotamos por $r_{\frac{2\pi}{3}}$ a rotação em torno do baricentro por $\frac{2\pi}{3}$ radianos. Vide Figura 2.3. Esta rotação altera, em sentido anti-horário, o nome de cada vértice pelo nome de seu vértice consecutivo. Isto é, o vértice A passa a ser o vértice C, o vértice B passa a ser o vértice A, e o vértice C passa a ser o vértice B.

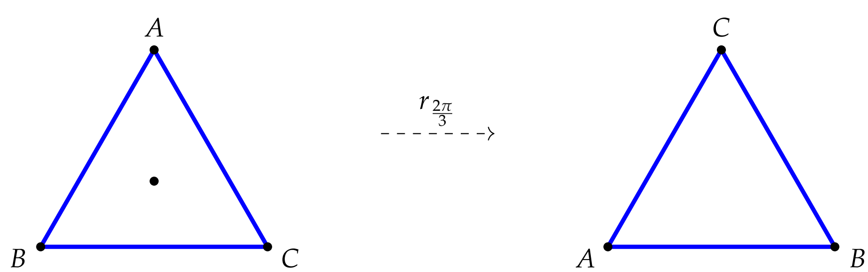

Figura 2.3

- Denotamos por $r_{\frac{4\pi}{3}}$ a rotação em torno do baricentro por $\frac{4\pi}{3}$ radianos. Vide Figura 2.4. Esta rotação altera, em sentido anti-horário, o nome de cada vértice pelo nome de seu vértice não consecutivo. Isto é, o vértice A passa a ser o vértice B, o vértice B passa a ser o vértice C, e o vértice C passa a ser o vértice A.

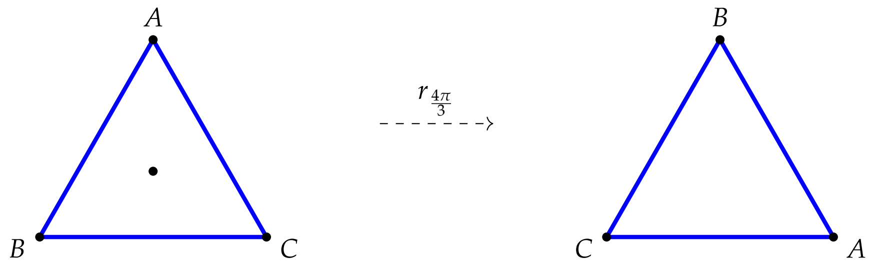

Figura 2.4

- Denotamos por r_S a reflexão sobre a mediana relativa ao vértice superior. Vide Figura 2.5. Esta reflexão fixa o vértice superior e troca os nomes dos outros dois vértices inferiores. Isto é, o vértice A continua sendo o vértice A, o vértice B passa a ser o vértice C, e o vértice C passa a ser o vértice B.

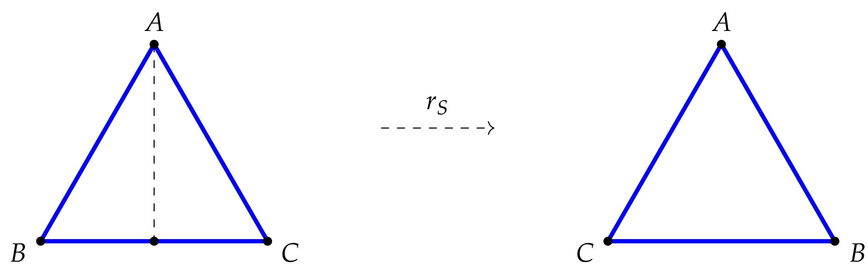

Figura 2.5

- Denotamos por r_E a reflexão sobre a mediana relativa ao vértice inferior à esquerda. Vide Figura 2.6. Esta reflexão fixa o vértice inferior à esquerda e troca os nomes dos outros dois vértices. Isto é, o vértice B continua sendo o vértice B, o vértice A passa a ser o vértice C, e o vértice C passa a ser o vértice A.

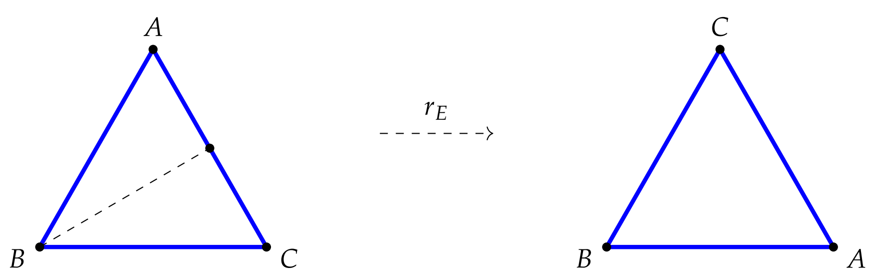

Figura 2.6

- Denotamos por r_D a reflexão sobre a mediana relativa ao vértice inferior à direita. Vide Figura 2.7. Esta reflexão fixa o vértice inferior à direita e troca os nomes dos outros dois vértices. Isto é, o vértice C continua sendo o vértice C, o vértice A passa a ser o vértice B, e o vértice B passa a ser o vértice A.

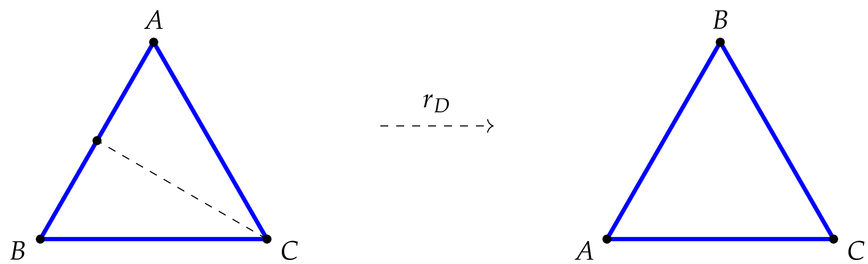

Figura 2.7

Seja $\mathbb{D}$ a coleção dessas simetrias do triângulo equilátero T. Ou seja:

$$\mathbb{D} := \left\{ r_0, r_{\frac{2\pi}{3}}, r_{\frac{4\pi}{3}}, r_S, r_E, r_D \right\}.$$

Podemos definir uma operação $*$ entre duas simetrias quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$ da seguinte maneira: $\alpha * \beta$ age sobre o triângulo equilátero T aplicando a simetria β e, em seguida, aplicando a simetria α no triângulo resultante βT. Tenhamos como exemplos as duas operações possíveis entre as reflexões r_S e r_D. Então:

- A operação $r_S * r_D$ age no triângulo equilátero T aplicando a simetria r_D e, em seguida, aplicando a simetria r_S no triângulo resultante $r_D T$. Vide Figura 2.8. A primeira aplicação deixa o vértice inferior à direita C estático, renomeia o vértice superior A chamando-o B, e renomeia o vértice inferior à esquerda B chamando-o A. Depois disso, a segunda aplicação deixa o vértice superior B estático, renomeia o vértice inferior à esquerda A chamando-o C, e renomeia o vértice inferior à direta C chamando-o A.

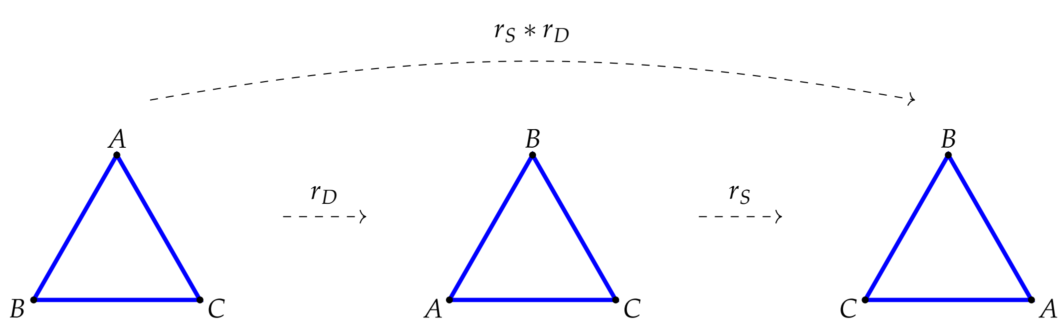

Figura 2.8

- A operação $r_D * r_S$ age no triângulo equilátero T aplicando a simetria r_S e, em seguida, aplicando a simetria r_D no triângulo resultante $r_S T$. Vide Figura 2.9. A primeira aplicação deixa o vértice superior A estático, renomeia o vértice inferior à esquerda B chamando-o C, e renomeia o vértice inferior à direita C chamando-o B. Depois disso, a segunda aplicação deixa o vértice inferior à direita B estático, renomeia o vértice superior A chamando-o C, e renomeia o vértice inferior à esquerda C chamando-o A.

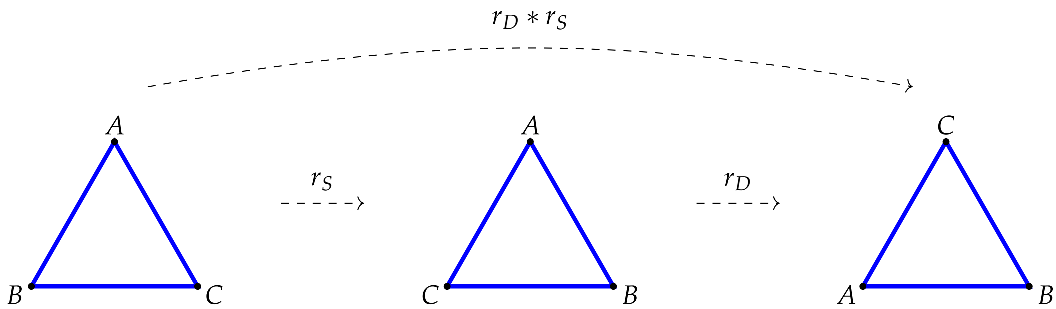

Figura 2.9

Observamos que a operação $r_S * r_D$ coincide exatamente com a rotação $r_{\frac{4\pi}{3}}$ ao passo que a operação $r_D * r_S$ coincide exatamente com a rotação $r_{\frac{2\pi}{3}}$. Isto já nos mostra que $\alpha * \beta$ não coincide com $\beta * \alpha$ para todas simetrias $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$. Além disso, a partir destes exemplos, surge naturalmente a seguinte pergunta: *para quaisquer duas simetrias $\alpha, \beta \in \mathbb{D}$ necessariamente $\alpha * \beta \in \mathbb{D}$?* A resposta para esta questão é sim! Para demonstrarmos este fato, ou seja, para assegurarmos a veracidade desta afirmação, basta olharmos para a Tabela 2.1 que contém todas as possíveis operações entre as simetrias do triângulo equilátero em questão.

$*$	$\boldsymbol{r_0}$	$\boldsymbol{r_{\frac{2\pi}{3}}}$	$\boldsymbol{r_{\frac{4\pi}{3}}}$	$\boldsymbol{r_S}$	$\boldsymbol{r_E}$	$\boldsymbol{r_D}$
$\boldsymbol{r_0}$	r_0	$r_{\frac{2\pi}{3}}$	$r_{\frac{4\pi}{3}}$	r_S	r_E	r_D
$\boldsymbol{r_{\frac{2\pi}{3}}}$	$r_{\frac{2\pi}{3}}$	$r_{\frac{4\pi}{3}}$	r_0	r_D	r_S	r_E
$\boldsymbol{r_{\frac{4\pi}{3}}}$	$r_{\frac{4\pi}{3}}$	r_0	$r_{\frac{2\pi}{3}}$	r_E	r_D	r_S
$\boldsymbol{r_S}$	r_S	r_E	r_D	r_0	$r_{\frac{2\pi}{3}}$	$r_{\frac{4\pi}{3}}$
$\boldsymbol{r_E}$	r_E	r_D	r_S	$r_{\frac{4\pi}{3}}$	r_0	$r_{\frac{2\pi}{3}}$
$\boldsymbol{r_D}$	r_D	r_S	r_E	$r_{\frac{2\pi}{3}}$	$r_{\frac{4\pi}{3}}$	r_0

Tabela 2.1: *Tabela das operações entre as simetrias do triângulo equilátero T. Esta tabela foi construída operando-se à esquerda cada elemento da primeira coluna com cada elemento da primeira linha, seguindo a disposição intuitiva nela indicada.*

As operações entre as simetrias aqui consideradas ainda gozam de outras propriedades muito interessantes. Tais propriedades são as seguintes:

- **(Associatividade).** Para quaisquer três simetrias do triângulo equilátero em questão $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{D}$ vale:
$$(\alpha * \beta) * \gamma = \alpha * (\beta * \gamma).$$
Deixamos esta demonstração para o amigo leitor. A fim de facilitar as contas, recomendamos que se faça uso da tabela acima mencionada.

- **(Existência de simetria neutra).** Para toda simetria do triângulo equilátero em questão $\alpha \in \mathbb{D}$ vale:
$$\alpha * r_0 = r_0 * \alpha = \alpha.$$
Dizemos que r_0 é a *simetria neutra* de $\mathbb{D}$. Este fato é muito simples de ser demonstrado analisando a segunda linha e a segunda coluna da Tabela 2.1.

- **(Existência de simetria inversa).** Para todo $\alpha \in \mathbb{D}$ existe $\beta \in \mathbb{D}$ de modo que:
$$\alpha * \beta = \beta * \alpha = r_0.$$
Dizemos que β é a *simetria inversa* de α e a denotamos por α^{-1}. A Tabela 2.2 abaixo mostra explicitamente a simetria inversa de cada simetria de $\mathbb{D}$.

Simetria	Simetria inversa
$\boldsymbol{r_0}$	r_0
$\boldsymbol{r_{\frac{2\pi}{3}}}$	$r_{\frac{4\pi}{3}}$
$\boldsymbol{r_{\frac{4\pi}{3}}}$	$r_{\frac{2\pi}{3}}$
$\boldsymbol{r_S}$	r_S
$\boldsymbol{r_E}$	r_E
$\boldsymbol{r_D}$	r_D

Tabela 2.2: *Tabela das simetrias inversas das simetrias do triângulo equilátero T.*

Antes de continuarmos vamos recordar algumas noções acerca de funções que serão usadas mais a frente neste texto. Lembramos que uma função é uma regra entre duas coleções de objetos tal que a cada elemento da primeira se associa um único elemento da segunda. Em geral, escrevemos $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$, para dizermos que f é uma função de X a Y que associa a cada elemento $x \in X$ o elemento $y := f(x) \in Y$. Nesta situação, dizemos que X é o *domínio* e que Y é o *contradomínio* da função f, respectivamente. Ademais, a subcoleção $f(X) := \{y \in Y : \text{existe } x \in X \text{ tal que } y = f(x)\}$ de Y é dita a *imagem* de X pela função f. Dizemos que a função f é *bijetora* se quaisquer dois elementos de X são levados por ela em elementos distintos de Y e se $f(X) = Y$.

Vamos agora usar a linguagem de funções para entender melhor a operação $*$ entre as simetrias do triângulo equilátero considerado. Enfaticamente, uma vez que a operação entre duas quaisquer simetrias pertencentes a $\mathbb{D}$ gera outra simetria pertencente a $\mathbb{D}$, fica bem definida a *Função Operação*:

$$\begin{aligned} * : \mathbb{D} \times \mathbb{D} &\rightarrow \mathbb{D}, \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \alpha * \beta. \end{aligned}$$

Sem mais delongas, podemos então dizer que a tripla $(\mathbb{D}, r_0, *)$ é um *grupo* para os matemáticos. Usualmente este grupo é chamado de **grupo de simetrias do triângulo equilátero**. Isso porque, em geral:

Definição 2.1 (Grupo)**.** Sejam G um conjunto não vazio e:

$$\begin{aligned} * : G \times G &\rightarrow G, \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

uma função que goza das seguintes propriedades:

- **(Associatividade).** Para cada três elementos $a, b, c \in G$ vale $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- **(Existência de elemento neutro).** Existe um (*único*) elemento $e \in G$ de modo que para todo elemento $a \in G$ vale $a * e = e * a = a$;
- **(Existência de elemento inverso).** Para todo elemento $a \in G$, existe um (*único*) $g^{-1} \in G$ de modo que $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$.

Nesta situação dizemos que a tripla $(G, e, *)$ é um **grupo** para os matemáticos. ⧫

Façamos agora um pequeno desvio a fim de falarmos de uma outra ideia de Jean Piaget. Conforme dissemos na Introdução, Piaget dividiu o Estágio Operatório em dois subestágios: o Estágio Operatório Concreto e o Estágio Operatório Formal. O autor nos diz que um indivíduo que se encontra no Estágio Operatório Concreto tem como característica o reconhecimento da validade de *silogismos concretos* mas não da validade de *silogismos abstratos*. A compreensão destes é o que caracteriza um indivíduo no Estágio Operatório Formal. Muito complicado isso? Sem dúvida! Vamos explicar então.

Um *silogismo* é um raciocínio dedutivo estruturado a partir de duas hipóteses, das quais se obtém uma conclusão. Portanto, um silogismo é composto por três proposições. Como exemplos: (*i*) *Hipótese 1:* (Todos os planetas são redondos). *Hipótese 2:* (A Terra é um planeta). *Conclusão:* (A Terra é redonda); e (*ii*) *Hipótese 1:* (Todos os planetas são quadrados). *Hipótese 2:* (A Terra é um planeta). *Conclusão:* (A Terra é quadrada). Um silogismo concreto é então um silogismo no qual a conclusão tem respaldo na realidade, como no primeiro exemplo. Já um silogismo formal é aquele cuja conclusão é distinta da realidade, como no segundo exemplo. Assim sendo, segundo Jean Piaget, o Estágio Operatório Concreto é caracterizado pela capacidade cognitiva de se entender uma estrutura lógica desde que ela tenha verossimilhança com a realidade, ao passo que o Estágio Operatório Formal caracteriza-se pela capacidade cognitiva de entender uma estrutura lógica abstrata independente da realidade.

Por que comentamos isso tudo? Ora, vejamos uma justificativa à luz do que fizemos até agora. Segundo esta proposta, inferimos que um indivíduo no Estágio Operatório Concreto tem capacidade cognitiva para entender o grupo de simetrias do triângulo equilátero, mas não a noção geral de grupo. Isto porque a primeira delas lida com objetos que são visuais e sensíveis, e a noção abstrata de grupo lida com objetos e com propriedades formais decorrentes da lógica. Da mesma forma, inferimos que um indivíduo no Estágio Operatório Concreto tem capacidade cognitiva para entender a Função Operação do grupo de simetrias do triângulo equilátero, mas não a noção de função em sua generalidade.

Exemplo 2.2 (Grupos e não grupos)**.** Vejamos alguns exemplos que podem nos ajudar a manter as ideias claras.

- A tripla $(\mathbb{Z}, 0, +)$ é um grupo. Aqui $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos números inteiros, 0 é o número zero e $+$ é a função que associa a cada par de números inteiros sua soma.

- A tripla $(\mathbb{N}, 0, +)$ *não* é um grupo. Aqui $\mathbb{N}$ é o conjunto dos números naturais, 0 também é o número zero e $+$ é a função que associa a cada par de números naturais sua soma. Esta tripla não é um grupo porque a função $+$ não verifica a *existência de elemento inverso*. De fato, por exemplo, não existe número natural que somado com 1 produza 0.

- A tripla $(\mathbb{Q}^*, 1, \cdot)$ é um grupo. Aqui $\mathbb{Q}^*$ é o conjunto dos números racionais sem o zero, 1 é o número um e $\cdot$ é a função que associa a cada par de números racionais seu produto.

- A tripla $(\mathbb{R}, 1, \cdot)$ *não* é um grupo. Aqui $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, 1 é o número um e $\cdot$ é a função que associa a cada par de números reais seu produto. Esta tripla não é um grupo porque a função $\cdot$ não verifica a *existência de elemento inverso*. De fato, não existe número real que multiplicado por 0 produza 1.

- Uma *permutação de três elementos do conjunto* $\{1, 2, 3\}$ é uma função bijetora desta coleção a si mesma. Existem seis possíveis permutações de três elementos. Com o intuito de melhor entendermos cada uma destas permutações, vamos a seguir detalhá-las e esquematizá-las. Então:

  – Denotemos a primeira de nossas permutações por $(1)(2)(3)$. Esta permutação é aquela que envia 1 em 1, 2 em 2 e 3 em 3. Vide Figura 2.10. Mais formalmente, $(1)(2)(3) : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 2$, $3 \mapsto 3$.

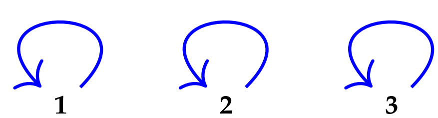

Figura 2.10

– Denotemos a segunda de nossas permutações por $(1\,2\,3)$. Esta permutação é aquela que envia 1 em 2, 2 em 3 e 3 em 1. Vide Figura 2.11. Mais formalmente, $(1\,2\,3) : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 1$.

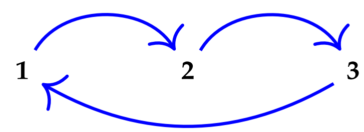

Figura 2.11

– Denotemos a terceira de nossas permutações por $(1\,3\,2)$. Esta permutação é aquela que envia 1 em 3, 2 em 1 e 3 em 2. Vide Figura 2.12. Mais formalmente, $(1\,3\,2) : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 2$.

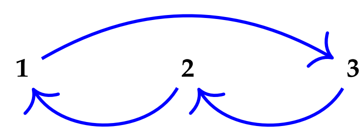

Figura 2.12

– Denotemos a quarta de nossas permutações por $(1)(2\,3)$. Esta permutação é aquela que envia 1 em 1, 2 em 3 e 3 em 2. Vide Figura 2.13. Mais formalmente, $(1)(2\,3) : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, $1 \mapsto 1$, $2 \mapsto 3$, $3 \mapsto 2$.

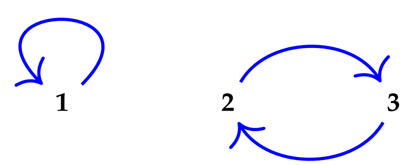

Figura 2.13

– Denotemos a quinta de nossas permutações por $(2)(1\,3)$. Esta permutação é aquela que envia 1 em 3, 2 em 2 e 3 em 1. Vide Figura 2.14. Mais formalmente, $(2)(1\,3) : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 2$, $3 \mapsto 1$.

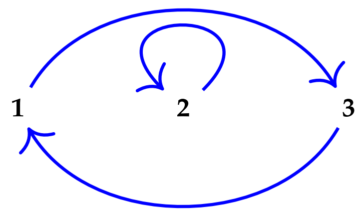

Figura 2.14

– Denotemos a sexta e última de nossas permutações por $(3)(1\,2)$. Esta permutação é aquela que envia 1 em 2, 2 em 1 e 3 em 3. Vide Figura 2.15. Mais formalmente, $(3)(1\,2) : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, $1 \mapsto 2$, $2 \mapsto 1$, $3 \mapsto 3$.

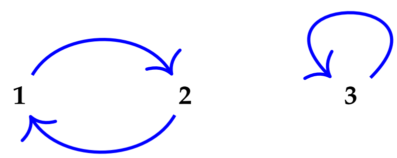

Figura 2.15

Seja $\mathbb{S}$ a coleção das permutações de três elementos do conjunto $\{1,2,3\}$. Isto é:

$$\mathbb{S} := \{(1)(2)(3),\ (1\,2\,3),\ (1\,3\,2),\ (1)(2\,3)\ ,(2)(1\,3),\ (3)(1\,2)\}.$$

Podemos definir a operação $\circ : \mathbb{S} \times \mathbb{S} \to \mathbb{S}$, $(\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta$. Aqui $\alpha \circ \beta : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$, $x \mapsto \alpha(\beta(x))$. Temos que a tripla $(\mathbb{S},\ (1)(2)(3),\ \circ)$ é também um grupo para os matemáticos. Este grupo é usualmente chamado de **grupo de permutações de três elementos**. Veremos adiante que este grupo é muito semelhante ao grupo de rotações do triângulo equilátero. Na verdade, em certo sentido, o grupo de permutações de três elementos e o grupo de rotações do triângulo equilátero são o mesmo. ♦

Voltemos agora a nossa discussão acerca dos grupos. Vamos falar de que maneira estes conversam entre si. Um grupo consiste, basicamente, em um conjunto equipado com uma função especial que chamamos de operação. Como já comentamos anteriormente, os conjuntos se relacionam através de funções. Desta forma, devemos esperar que os grupos também se relacionem através de funções. E é isto o que ocorre! Entretanto, nem todas as funções são aceitáveis para cumprirem este papel. Isto porque precisamos que as operações dos grupos sejam preservadas por elas. As funções que têm esta propriedade são usualmente chamadas de *homomorfismos*. Mais formalmente:

Definição 2.3 (Homomorfismo de grupos)**.** Sejam $(G, e_G, *_G)$ e $(H, e_H, *_H)$ dois grupos. Uma função $\varphi : G \to H$ tal que:

$$\varphi(a *_G b) = \varphi(a) *_H \varphi(b) \text{ para todos } a, b \in G$$

é um **homomorfismo** entre os grupos considerados. Nesta situação, temos que $\varphi(e_G) = e_H$ e que $\varphi(a^{-1}) = \varphi(a)^{-1}$ para todo $a \in G$. ♦

Exemplo 2.4 (Homomorfismo identidade)**.** Seja $(G, e, *)$ um grupo qualquer. A função identidade $id_G : G \to G$, $g \mapsto g$, é um homomorfismo do grupo $(G, e, *)$ em si mesmo. De fato, $id_G(a * b) = a * b = id_G(a) * id_G(b)$ para todos $a, b \in G$. Ademais:

- $id_G(e) = e$;
- $id_G(a^{-1}) = a^{-1} = id_G(a)^{-1}$ para todo $a \in G$. ♦

Vamos agora a uma noção mais refinada: os isomorfismos de grupos. Esclarecemos que a palavra *isomorfismo* deriva do termo *isomorfo* cuja etimologia, por sua vez, nos remete à ideia de *mesma forma*. Portanto, um isomorfismo é algo que garante que dois objetos tenham a mesma forma. Em nosso contexto, um isomorfismo de grupos é uma função que preserva as operações dos grupos e que assegura que os conjuntos subjacentes destes tenham a mesma quantidade de elementos. Ou seja:

Definição 2.5 (Isomorfismo de grupos)**.** Dizemos que um homomorfismo de grupos bijetor é um **isomorfismo** de grupos. Os grupos em questão, nesta situação, são ditos **isomorfos**. ♦

Exemplo 2.6 (Isomorfismo identidade)**.** O homomorfismo do Exemplo 2.4 é evidentemente bijetor. Portanto, temos aqui um isomorfismo de grupos. Chamamos este de **isomorfismo identidade**. Em particular, este exemplo nos diz que todo grupo é isomorfo a si mesmo. ♦

Deixamos também como exercício para o leitor mostrar que o grupo de simetrias do triângulo equilátero e o grupo de permutações de três elementos são isomorfos. Ou seja, deixamos para o leitor o trabalho de definir um isomorfismo entre estes dois grupos. É neste sentido que dissemos antes que estes grupos são o mesmo. Isto é, o grupo de simetrias do triângulo equilátero e o grupo de permutações de três elementos são o mesmo a menos de isomorfismo. Repare que, neste caso, os elementos componentes dos grupos em questão são intrinsecamente distintos. Isto porque temos rotações de um triângulo equilátero por um lado e, por outro, funções bijetoras de um conjunto de três elementos em si mesmo.

Em geral, um isomorfismo de grupos se comporta como um par de óculos que podemos pôr e que nos faz deixar de ver todas as qualidades particulares dos grupos considerados. Todavia, este par de óculos tem como condição *sine qua non* para seu funcionamento a garantia de que a quantidade de elementos e a forma como operamos tais elementos sejam necessariamente as mesmas.

3. Estruturas mais gerais

Nesta seção vamos tratar sobre algumas estruturas matemáticas gerais que, em particular, contemplam a estrutura matemática de grupo discutida em detalhes até aqui. Além disso, vamos interpretar os outros estágios do desenvolvimento propostos por Jean Piaget dentro deste novo contexto. Também, vale ressaltar que, por simplicidade, em alguns momentos, vamos denotar os grupos nesta seção somente por seus conjuntos subjacentes, subentendo seus elementos neutros e suas operações.

Iniciamos esta parte do trabalho considerando um dos exemplos que apresentamos anteriormente: $(\mathbb{N}, 0, +)$. Por que esta tripla não é um grupo? A justificativa é a simples: porque ela não verifica a propriedade da *existência de elemento inverso*. De fato, não existe número natural que somado com 1 resulte em 0. Entretanto, continua valendo para ela a propriedade da *associatividade da operação* e, também, a propriedade da *existência de elemento neutro*. Ou seja, apesar de a tripla em questão não possuir uma estrutura de grupo, ainda há alguma estrutura nela. De fato, esta estrutra especial é a seguinte:

Definição 3.1 (Monóide)**.** Sejam M um conjunto não vazio e:

$$\begin{aligned} * : M \times M &\rightarrow M, \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

uma função que goza das seguintes propriedades:

- **(Associatividade).** Para cada três elementos $a, b, c \in M$ vale $(a * b) * c = a * (b * c)$;
- **(Existência de elemento neutro).** Existe um (*único*) elemento $e \in M$ de modo que para todo elemento $a \in M$ vale $a * e = e * a = a$;

Nesta situação dizemos que a tripla $(M, e, *)$ é um **monóide**. ♦

Seja $(\mathbb{N}^*, +)$ a dupla obtida a partir do monóide acima removendo-se o elemento neutro e fazendo a devida restrição na operação do mesmo. Agora, além de esta dupla não verificar a propriedade da *existência de elemento inverso*, ela não verifica a propriedade da *existência de elemento neutro*. Contudo, a dupla $(\mathbb{N}^*, +)$ continua verificando a propriedade da *associatividade da operação*. Ou seja, ainda há alguma estrutura familiar aqui. Em geral, esta estrutura especial é denominada por:

Definição 3.2 (Semigrupo)**.** Sejam S um conjunto não vazio e:

$$\begin{aligned} * : S \times S &\rightarrow S, \\ (a, b) &\mapsto a * b \end{aligned}$$

uma função que goza da seguintes propriedade:

- **(Associatividade).** Para cada três elementos $a, b, c \in S$ vale $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Nesta situação dizemos que a dupla $(S, *)$ é um **semigrupo**. ♦

Vamos a outra rápida digressão sobre as ideias de Jean Piaget. Este estudioso entendeu a passagem do Estágio Pré-operatório para o Estágio Operatório através do ganho da capacidade cognitiva de entender a reversibilidade das operações. Entretanto, concomitantemente com a reversibilidade, Piaget disse que surgiria a noção de operação neutra. Ou seja, o indivíduo que se encontra no Estágio Pré-operatório deixa de organizar as operações como um semigrupo e, ao atingir o Estágio Operatório, as organiza como um grupo. Desta forma, o Homem não passa pela estrutura de monóide em seu desenvolvimento cognitivo.

Até aqui retiramos propriedades da noção de grupo para definir os monóides e, posteriormente, os semigrupos. Vamos então definir uma noção especial que nos permite caminhar no sentido contrário:

Definição 3.3 (Operação binária associativa)**.** Seja G um conjunto não vazio. Dizemos que uma função $* : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a * b$, é uma *operação binária* em G. Além disso, se valer a igualdade $(a * b) * c = a * (b * c)$ para todos $a, b, c \in G$, dizemos então que $*$ é uma *operação binária associativa* em G. ⧫

Portanto, usaremos agora a noção de operação binária associativa acima para definir os monóides e, posteriormente, os grupos, a partir da estrutura de semigrupo. Ou seja, de modo mais formal, temos que:

Definição 3.4 (Semigrupo, monóide e grupo)**.** Um **semigrupo** é um conjunto não vazio equipado com uma operação binária associativa. Chamamos de **monóide** a um semigrupo $(G, *)$ que contém um elemento identidade $e \in G$ que verifica a igualdade $a * e = e * a = a$ para todo $a \in G$. Um monóide $(G, e, *)$ tal que existe um (*único*) inverso $a^{-1} \in G$ de modo que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ para todo $a \in G$, é chamado de **grupo**. Se valer a igualdade $g * h = h * g$ para todos g, $h \in G$, a estrutura em questão é **abeliana**. ⧫

Jean Piaget foi um dos pioneiros a reconhecer que havia inteligência nas crianças entre zero e dois anos. Na verdade, Piaget nos mostrou que as formas como as crianças no Estágio Sensor-motor organizam suas relações com o mundo são bastante diversas. Isto porque elas são capazes de estruturar algumas operações mas não outras. Assim sendo, tais indivíduos gozam de blocos cognitivos que não se interrelacionam por completo. Uma estrutura matemática que permite analogia com esta disposição cognitiva, em nossa opinião, é a que chamamos de categoria. Esta estrutura é a seguinte:

Definição 3.5 (Categoria)**.** Uma **categoria** $\mathscr{C}$ é composta pelas seguintes peças:

- uma classe de objetos $Ob(\mathscr{C})$;
- para cada dois objetos A, $B \in Ob(\mathscr{C})$, um conjunto $Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$. Os elementos destes são ditos morfismos de $\mathscr{C}$;

- para cada três objetos A, B, $C \in Ob(\mathscr{C})$, uma lei de composição:

$$\begin{array}{rcl} \circ : Hom_{\mathscr{C}}(A, B) \times Hom_{\mathscr{C}}(B, C) & \to & Hom_{\mathscr{C}}(A, C), \\ (f, g) & \mapsto & g \circ f. \end{array}$$

Ainda, estas peças devem verificar as seguintes propriedades:

- se os pares (A, B), $(C, D) \in Ob(\mathscr{C}) \times Ob(\mathscr{C})$ não são iguais, então os conjuntos de morfismos $Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ e $Hom_{\mathscr{C}}(C, D)$ devem ser disjuntos;

- para todos A, B, C, $D \in Ob(\mathscr{C})$ e para todos $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$, $g \in Hom_{\mathscr{C}}(B, C)$ e $h \in Hom_{\mathscr{C}}(C, D)$, devemos ter $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$;

- para cada $A \in Ob(\mathscr{C})$ deve existir um (*único*) morfismo $id_A \in Hom_{\mathscr{C}}(A, A)$ de sorte que $f \circ id_A = f$ e que $id_A \circ g = g$, para todos B, $C \in Ob(\mathscr{C})$ e para todos $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$ e $g \in Hom_{\mathscr{C}}(C, A)$. ⧫

Exemplo 3.6 (Categoria dos grupos)**.** Vejamos o exemplo da categoria dos grupos a fim de mantermos as ideias claras. A categoria dos grupos $\mathscr{G}$ é formada pelas seguintes peças:

- $Ob(\mathscr{G})$ é a classe dos grupos;

- para cada dois grupos A, $B \in Ob(\mathscr{G})$, o conjunto $Hom_{\mathscr{G}}(A, B)$ é a coleção dos homomorfismos de A a B;

- para cada três grupos A, B, $C \in Ob(\mathscr{G})$, a lei de composição é a que associa a cada $(f, g) \in Hom_{\mathscr{G}}(A, B) \times Hom_{\mathscr{G}}(B, C)$ o homomorfismo de grupos $(g \circ f) \in Hom_{\mathscr{G}}(A, C)$ tal que $(g \circ f)(x) := g(f(x))$ para todo $x \in A$.

Deixamos para o leitor verificar que estas peças obedecem às condições expostas na definição de categoria. ⧫

Vejamos no Exemplo 3.8 como os monóides podem ser escritos a partir da linguagem das categorias matemáticas. Antes disso, porém, vamos fixar uma nomenclatura a respeito das categorias:

Definição 3.7 (Categoria unitária)**.** Dizemos que uma categoria é *unitária* se sua coleção de objetos contiver um único elemento. ⧫

Exemplo 3.8 (Monóides e categorias unitárias)**.** Uma categoria unitária é sempre um monóide. De fato, o único conjunto de morfismos possui um único morfismo identidade. Além disso, a lei de composição neste conjunto de morfismos define uma operação binária associativa. Reciprocamente, todo monóide é uma categoria unitária. Enfaticamente, temos uma categoria unitária a partir de um monóide considerando seu único objeto como sendo o conjunto de elementos do monóide, seus morfismos como sendo os elementos do monóide e a lei de composição destes como sendo a operação do monóide. Isto mostra que há uma equivalência estrutural entre as categorias unitárias e os monóides. ⧫

Em geral, as categorias admitem muitas noções de isomorfismo. Aqui vamos ver a seguir a noção de isomorfismo entre objetos. Mais adiante, veremos quais as semelhaças que existem entre esta definição na categoria dos grupos e a definição de isomorfismo de grupos explicada no fim da seção anterior.

Definição 3.9 (Isomorfismo em uma categoria)**.** Sejam $\mathscr{C}$ uma categoria e $f \in Hom_{\mathscr{C}}(A, B)$, com $A, B \in \mathscr{C}$. Dizemos que f é um **isomorfismo** entre A e B se existe um (*único*) morfismo $f^{-1} \in Hom_{\mathscr{C}}(B, A)$, chamado **inverso** de f, tal que $f^{-1} \circ f = id_A$ e que $f \circ f^{-1} = id_B$. Neste caso, dizemos que os objetos A e B são **isomorfos**. ♦

Podemos escrever os grupos a partir das categorias matemáticas da mesma forma que fizemos no Exemplo 3.8. Para isso, entretanto, é fundamental termos em mente a noção de isomorfismo acima. Deixamos para o competente leitor cuidar dos detalhes desta possibilidade. Contudo, vamos esclarecer os isomorfismos na categoria dos grupos com o teorema a seguir. Este nos diz que a noção de isomorfismo de grupos é exatamente a mesma que a noção de isomorfismo de objetos na categoria dos grupos.

Teorema 3.10. *Um morfismo na categoria dos grupos é um isomorfismo se, e somente se, este morfismo é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Seja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(G, H)$, com $G, H \in \mathscr{G}$.

($\Rightarrow$) Precisamos mostrar que se f é um isomorfismo na categoria dos grupos $\mathscr{G}$, então f é um isomorfismo de grupos. Para isso, precisamos somente verificar que f é uma função bijetora dado que já é um homomorfismo de grupos. De fato, como f é um isomorfismo em $\mathscr{G}$, existe $f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(H, G)$ de sorte que $f^{-1} \circ f = id_G$ e que $f \circ f^{-1} = id_H$. Então:

- Quaisquer dois elementos pertencentes a G são levados por f em elementos distintos pertencentes a H. Enfaticamente, se $f(a) = f(b)$ com $a, b \in G$, então $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(b))$. Ou seja, $(f^{-1} \circ f)(a) = (f^{-1} \circ f)(b)$. E, portanto, a igualdade $id_G(a) = id_G(b)$ implica a igualdade desejada $a = b$.
- Para todo elemento $a \in H$ existe um elemento $b \in G$ de modo que $f(b) = a$. Ou seja, $f(G) = H$. Enfaticamente, sendo $a \in H$, temos que $b := f^{-1}(a) \in G$ verifica a propriedade acima. Isto porque $f(b) = f(f^{-1}(a)) = (f \circ f^{-1})(a) = id_H(a) = a$.

($\Leftarrow$) Precisamos mostrar que se f é um isomorfismo de grupos, então f é um isomorfismo na categoria dos grupos $\mathscr{G}$. Para isso, precisamos somente verificar que existe $f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(H, G)$ de sorte que $f^{-1} \circ f = id_G$ e que $f \circ f^{-1} = id_H$. De fato, como f é um homomorfismo de grupos bijetor, para todo $a \in H$ existe um único $b \in G$ de modo que $f(b) = a$. Definimos $f^{-1}(a) := b$. Basta mostrar então que a função bijetora $f^{-1} : H \to G$ é um homomorfismo de grupos, pois é evidente que $f^{-1} \circ f = id_G$ e que $f \circ f^{-1} = id_H$. Enfaticamente, para todos $a, b \in H$ existem únicos $c, d \in G$ de modo que $f(c) = a$ e que $f(d) = b$. Logo, $f^{-1}(a * b) = f^{-1}(f(c) * f(d)) = f^{-1}(f(c * d)) = (f^{-1} \circ f)(c * d) = id_G(c * d) = c * d = f^{-1}(a) * f^{-1}(b)$. ■

Por fim, falemos brevemente dos pioneiros das categorias matemáticas. *Samuel Eilenberg* nasceu a 30 de setembro de 1913 em Varsóvia, Polônia, e faleceu a 30 de janeiro de 1998 em Nova York, EUA. *Saunders Mac Lane* nasceu a 4 de agosto de 1909 em Connecticut, EUA, e faleceu a 14 de abril de 2005 na Califórnia, EUA. A partir de 1943 estes dois matemáticos colaboraram na área de Topologia Algébrica e, em 1945, lançaram os fundamentos da *Teoria das Categorias* com a publicação *General Theory of Natural Equivalences*.

Saunders Mac Lane (1909 - 2005)

Samuel Eilenberg (1913 - 1998)

Rapidamente as noções correlatas às categorias se mostraram muito mais interessantes do que se imaginava porque vários campos da Matemática puderam ser interpretados em seus termos. Esta teoria se mostrou capaz de reconhecer e captar analogias dentro da Matemática como nenhuma outra o fez. Desta maneira, a Teoria das Categorias se tornou uma área da Matemática que, ainda hoje, é muito estudada e capaz de resultados impressionantes e realmente abstratos. Entretanto, estes são assuntos para uma próxima conversa!

4. Conclusões

- Os grupos se mostram os exemplos iniciais e mais naturais que podemos escolher para entender uma estrutura matemática. Neste sentido, pensar sobre eles pode ser bastante esclarecedor.

- As estruturas matemáticas são suficientemente gerais a fim de captarem não só analogias dentro das diversas áreas da Matemática mas também para servirem às outras áreas do conhecimento como analogias esclarecedoras. Um trecho que exemplifica esta concepção foi encontrado em um dos trabalhos de Jean Piaget e o mesmo foi aqui estendido para ressaltar tal possibilidade.

- Jean Piaget é um homem de categoria! Isto porque a extensão e a qualidade de seu trabalho deixaram influências profundas em sua área de estudo. Por outro lado, Samuel Eilenberg e Saunders Mac Lane são cada um duplamente homens de categoria! Isto porque seus trabalhos influenciaram suas áreas de estudo e porque foram os pioneiros da Teoria das Categorias.

Referências

[1] HUNGERFORD, Thomas W. **Algebra**. Graduate Texts in Mathematics 73. Springer-Verlag New York, 1980.

[2] PIAGET, J. W. F. **Seis estudos de psicologia**. Forense Universitária, 1999, ed. 24.

[3] **Samuel Eilenberg - wielki matematykz Warszawy**. Disponível na Internet em: http://duch.mimuw.edu.pl/∼sjack/opera/2014_eilenberg_wiad_mat.pdf. Acessado em 16 de julho de 2019.

[4] **The University of Chicago, News Office. April 21, 2005**. Disponível na Internet em: http://www-news.uchicago.edu/releases/05/050421.maclane.shtml. Acessado em 16 de julho de 2019.