Uma introdução aos jogos topológicos

José Carlos Fontanesi Kling *

Instituto de Ciências Matemáticas e Computação
Universidade de São Paulo
jose.kling@usp.br

Resumo

O objetivo deste artigo é apresentar de uma maneira atrativa (na medida do possível) o que são jogos topológicos. Para isso usaremos o mínimo de conhecimento prévio possível e serão dadas as definições de topologia necessárias para a compreensão de todos os enunciados e teoremas.
Serão apresentados os jogos ponto-aberto e de Rothberger, pois além de serem simples poderemos provar um resultado interessante, de que, de alguma maneira (que será explicada no artigo), eles são o mesmo jogo.

1. Introdução

O primeiro jogo topológico de que se tem conhecimento foi proposto em 1935 por Stanistaw Mazur, e ficou conhecido como "jogo de Banach-Mazur", pois foi solucionado por Stefan Banach (o mesmo do paradoxo de Banach-Tarski ou dos espaços de Banach), mas somente em 1950, quando foi publicado o Scottish Book[1], onde constava o problema, é que a área começou a ter mais adeptos.
Essa é, portanto, uma área de pesquisa bastante recente, com a qual muitas pessoas nunca teriam contato, e o intuito deste artigo é justamente de difundí-la especialmente entre alunos de graduação, já que com um mínimo de requisitos já podemos enunciar alguns jogos e demonstrar resultados (espera-se) interessantes.

2. Definições básicas

Antes de apresentarmos os jogos, precisamos de dois conceitos básicos de topologia com que em algum momento o estudante de matemática se deparará, o de **aberto** e o de **espaço topológico**:

Definição 1. *Seja X um conjunto. Uma **topologia** τ sobre X é um conjunto de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:*

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. $A, B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$
3. $\mathcal{A}$ *subconjunto de* $\tau \Rightarrow \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A \in \tau$

*Este artigo é resultado da iniciação científica desenvolvida pelo autor com apoio da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), processo nº 2015/00909-4, sob a orientação do Prof. Dr. Leandro Aurichi.

[1] O livro leva esse nome porque vários matemáticos da Lwów School of Mathematics, na Polônia, se reuniam no Scottish Café afim de discutir e propor problemas. As conclusões eram anotadas em um caderno e mantidas com o proprietário.

Em palavras: τ é fechado por união e também por intersecções finitas.
*Chamamos cada elemento de τ de **aberto** e o par (X, τ) de **espaço topológico**.*

A ideia aqui é que temos um conjunto qualquer e uma maneira de "organizar"seus elementos em abertos. O espaço topológico mais fácil de ser visualizado é a reta real com a topologia usual, ou seja, o conjunto X neste caso é $\mathbb{R}$ e τ é o conjunto de todos os elementos de $\mathbb{R}$ que são uniões de intervalos abertos, portanto $(1,2)$ e $(2,4) \cup (37,58)$ são abertos, já $\{-2\}$ e $[-1,1) \cup (3,4)$ não são.
Note que essa definição satisfaz as três condições (portanto, é, de fato, um espaço topológico) e note também que, apesar de τ ser fechado por intersecções finitas, não o é por intersecções infinitas, já que podemos tomar $\mathcal{A} = \{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) | n \in \mathbb{N}\}$, então $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{0\} \notin \tau$.
Poderíamos definir τ como todos os subconjuntos de $\mathbb{R}$ (denominado topologia discreta), gerando um espaço topológico diferente do anterior, mesmo que sobre o mesmo conjunto.
Além dessa, precisaremos de apenas mais uma definição simples, a de cobertura aberta:

Definição 2. *Seja (X, τ) espaço topológico. $\mathcal{C} \subset \tau$ é uma **cobertura aberta** se $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = X$.*

Usando o exemplo da reta real com a topologia usual, uma cobertura possível é $\mathcal{C} = \{(-n, n) | n \in \mathbb{N}\}$, pois $\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C = \mathbb{R}$. Já se definirmos $\mathcal{C} = \{(z, z+1) | z \in \mathbb{Z}\}$, então $\mathcal{C}$ não é cobertura, pois os inteiros não são cobertos por $\mathcal{C}$.
Apenas com essas definições já é possível compreender os enunciados e conseguir alguns resultados sobre os jogos topológicos que serão apresentados a seguir.

3. Jogo de Rothberger

Os jogos topológicos são, em grande parte, jogos como outro qualquer, com dois jogadores, regras para as jogadas e critério de vitória. O que causa maior estranheza é que eles tem infinitas jogadas (no nosso caso, como na maioria, são enumeráveis jogadas, mas não necessariamente).
Vamos então às regras:

Definição 3. *Chamamos de **jogo de Rothberger** o seguinte jogo entre os jogadores I e II:*
Seja (X, τ) espaço topológico. A cada rodada $n \in \mathbb{N}$, o jogador I escolhe $\mathcal{C}_n$ cobertura aberta para X e então o jogador II escolhe $C_n \in \mathcal{C}_n$. O jogador II ganha se $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = X$. Caso contrário, o jogador I é o vencedor.

Antes de trabalhar com o jogo precisaremos de uma noção bastante intuitiva, utilizada para todo tipo de jogo, não somente os topológicos, que é a de **estratégia**. Uma estratégia é uma maneira definida de jogar, com uma resposta para todas as possíveis jogadas do adversário. Por exemplo, a estratégia do jogador I pode ser jogar a cobertura $\mathcal{C} = \{X\}$ em todas as rodadas. Claro que essa não é uma boa estratégia, mas ainda assim é uma estratégia, pois sabemos exatamente como I jogará, independente das jogadas do jogador II. Logo, se tivermos uma estratégia definida, o jogador passa a não ter nenhuma relevância, pois todas as decisões já estão tomadas.
Nesses jogos é possível que algum jogador tenha uma **estratégia vencedora**, que é uma estratégia com a propriedade adicional de sempre levar o jogador à vitória, não importa como o adversário jogue.
Imagine este jogo em um espaço enumerável - o que significa que os elementos desse espaço estão em bijeção com os números naturais. Em tal caso o jogador II tem estratégia vencedora como demonstrado a seguir.
Se o espaço X é enumerável, então $X = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$, portanto para que II vença, basta que na

n-ésima rodada ele escolha um aberto $C_n \in \mathcal{C}_n$ tal que $x_n \in C_n$. Note que não importa a escolha da cobertura por I, II tem uma resposta que irá levá-lo à vitória.
Imediatamente muita gente deve se perguntar: e sobre os reais, alguém possui estratégia vencedora? A resposta fica a cargo do leitor. [2]
Vale ressaltar que nem sempre algum dos jogadores possui estratégia vencedora; nesse jogo mesmo existem espaços em que, definida qualquer estratégia para um jogador, o oponente tem uma maneira de jogar que a vence.

4. Jogo ponto-aberto

O jogo ponto-aberto é como o oposto do jogo de Rothberger, se antes o objetivo do jogador I era evitar que II consiga formar uma cobertura para o espaço, agora o objetivo de I é justamente forçar II a recobrir o espaço. Curiosamente, como veremos no final do artigo, isso é apenas um "disfarce".

Definição 4. *As rodadas no **jogo ponto-aberto** sobre um espaço topológico (X, τ) se dão assim: a cada rodada $n \in \mathbb{N}$ o jogador I escolhe $x_n \in X$, então II escolhe A_n aberto tal que $x_n \in A_n$. O jogador I vence se $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$.*

Vejamos o que acontece nesse jogo usando os mesmos exemplos do item anterior.
Se X é enumerável, então tomemos a enumeração $X = \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ e definamos que na n-ésima rodada, I escolhe x_n. Assim, II escolherá A_n com $x_n \in A_n$. Dessa forma, para todo $x \in X$ existirá $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in A_n$, logo $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = X$. Essa é, portanto, uma estratégia vencedora para o jogador I.
Perceba que no jogo anterior quem tinha estratégia vencedora em um espaço enumerável era o jogador II, mas no presente jogo é o I. Será que esse efeito também ocorre quando jogado sobre os reais?

5. Dualidade

Quando foi dito que os dois jogos apresentados são, de alguma maneira, um só, é porque eles são duais, e nessa seção discutiremos o que é esse conceito e o que isso implica.

Definição 5. *Suponha que G e H sejam dois jogos topológicos jogados sobre um espaço topológico (X, τ). Dizemos que eles são duais se para todo (X, τ):*

- *I tem estratégia vencedora em G $\Longleftrightarrow$ II tem estratégia vencedora em H*
- *I tem estratégia vencedora em H $\Longleftrightarrow$ II tem estratégia vencedora em G*

Agora vamos mostrar que os jogos apresentados anteriormente são duais. Esse resultado nos diz que se for encontrada uma estratégia vencedora para algum jogador em um dos jogos, temos automaticamente que existe uma estratégia vencedora para o outro jogador no outro jogo. Logo, com esse resultado, se soubermos a resposta para a pergunta sobre o jogo de Rothberger automaticamente temos a resposta para a pergunta sobre o ponto-aberto.
Para provar esse teorema vamos mostrar cada uma das quatro implicações separadamente, começando pelas mais simples.

Teorema 1. *Se I tem estratégia vencedora no jogo ponto-aberto, então II tem estratégia vencedora no jogo de Rothberger.*

[2] Dica: séries podem convergir.

Demonstração. O que precisamos fazer é, a partir da estratégia vencedora de I no ponto-aberto, montar uma para II no jogo de Rothberger. Considere a tabela a seguir:

Rodada	I P-A	$\rightarrow$	I Roth	II Roth
1	x_0	$\rightarrow$	$\mathcal{C}_0$	C_0 com $x_0 \in C_0$
2	x_1	$\rightarrow$	$\mathcal{C}_1$	C_1 com $x_1 \in C_0$
3	x_2	$\rightarrow$	$\mathcal{C}_2$	C_2 com $x_2 \in C_0$
4	x_3	$\rightarrow$	$\mathcal{C}_3$	C_3 com $x_3 \in C_0$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

A coluna "I P-A" denota as jogadas do jogador I no ponto-aberto seguindo a estratégia vencedora, considerando que as jogadas de II são $C_0, C_1, C_2, ...$ Jogando assim, II vencerá o jogo, pois como a estratégia de I no ponto-aberto é vencedora, os abertos escolhidos contendo os pontos $x_0, x_1, x_2...$ necessariamente formam uma cobertura, em particular os abertos que fazem parte das coberturas escolhidas por I. □

Cabe aqui uma observação: as jogadas da estratégia vencedora dependem das jogadas anteriores do adversário, portanto x_2, por exemplo, não é fixo, mas depende de C_0 e C_1.

Teorema 2. *Se I tem estratégia vencedora no jogo de Rothberger, então II tem estratégia vencedora no jogo ponto-aberto.*

Demonstração. Vamos proceder como no caso anterior, mas desta vez precisamos de uma estratégia para II no jogo ponto-aberto.

Rodada	I Roth	$\rightarrow$	I P-A	II P-A
1	$\mathcal{C}_0$	$\rightarrow$	x_0	$A_0 \in \mathcal{C}_0$
2	$\mathcal{C}_1$	$\rightarrow$	x_1	$A_1 \in \mathcal{C}_1$
3	$\mathcal{C}_2$	$\rightarrow$	x_2	$A_2 \in \mathcal{C}_2$
4	$\mathcal{C}_3$	$\rightarrow$	x_3	$A_3 \in \mathcal{C}_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Novamente, "I Roth" é a estratégia vencedora no jogo de Rothberger, considerando que as respostas sejam os abertos $A_0, A_1, A_2, ...$ Dessa forma, II vencerá o jogo, pois como a estratégia do jogador I no jogo de Rothberger é vencedora, quaisquer abertos escolhidos das coberturas $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, ...$ não formarão uma cobertura, em particular os abertos $A_0, A_1, A_2, ...$, portanto II vence a partida. □

Para as próximas duas demonstrações será útil apresentar uma notação para estratégias que deixe explícita a rodada e, principalmente, quais foram as jogadas anteriores.

Definição 6. *Denotamos uma estratégia, para qualquer dos dois jogadores, por σ. Se as jogadas anteriores do adversário são $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$, então a próxima jogada da estratégia é $\sigma(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n)$.*

Se imaginarmos que σ é uma estratégia para o jogador I no jogo de Rothberger, então teremos a seguinte partida:

Rodada	I	II
1	$\sigma(\emptyset)$	$C_0 \in \sigma(\emptyset)$
2	$\sigma(C_0)$	$C_1 \in \sigma(C_0)$
3	$\sigma(C_0, C_1)$	$C_2 \in \sigma(C_0, C_1)$
4	$\sigma(C_0, C_1, C_2)$	$C_3 \in \sigma(C_0, C_1, C_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Neste caso, portanto, cada um dos $\sigma(\emptyset), \sigma(C_0), \sigma(C_0, C_1), ...$ é uma cobertura, pois é uma jogada do jogador I.

Teorema 3. *Se II tem estratégia vencedora no jogo ponto-aberto, então I tem estratégia vencedora no jogo de Rothberger.*

Demonstração. Seja σ a estratégia vencedora de II no ponto-aberto. Primeiro devemos notar que $\{\sigma(x) | x \in X\}$ é cobertura para X. Esse fato é imediato, pois dado $x_0 \in X$, temos que $x_0 \in \sigma(x_0)$, pois $\sigma(x_0)$ é uma jogada de II no ponto-aberto, ou seja, é um aberto contendo x_0; usando o mesmo raciocínio, concluímos que $\{\sigma(x_1, ..., x_n, x) | x \in X\}$ também é cobertura. Perceba então que para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{\sigma(x_1, ..., x_n, x) | x \in X\}$ é uma jogada válida para o jogador I no jogo de Rothberger para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in X$.
Outro fato importante é que, para cada aberto A da cobertura $\{\sigma(x_1, \ldots, x_n, x) | x \in X\}$, podemos encontrar ao menos um elemento $x_0 \in X$ tal que $\sigma(x_1, ..., x_n, x_0) = A$, isso porque as escolhas de II são limitadas a abertos da cobertura, que são todos desse tipo.
Afirmamos que se na primeira rodada o jogador I jogar a cobertura $\{\sigma(x) | x \in X\}$ e para cada uma das $n \in \mathbb{N}$ seguintes jogar a cobertura $\{\sigma(x_1, ..., x_{n-1}, x) | x \in X\}$, com x_n tal que $\sigma(x_1, ..., x_n) = A_{n-1}$, então ele vencerá a partida. Como na tabela:

Rodada	I Roth	II Roth	$\to$	II P-A
1	$\{\sigma(x) \| x \in X\}$	A_0	$\to$	$\sigma(x_1) = A_0$
2	$\{\sigma(x_1, x) \| x \in X\}$	A_1	$\to$	$\sigma(x_1, x_2) = A_1$
3	$\{\sigma(x_1, x_2, x) \| x \in X\}$	A_2	$\to$	$\sigma(x_1, x_2, x_3) = A_2$
4	$\{\sigma(x_1, x_2, x_3, x) \| x \in X\}$	A_3	$\to$	$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4) = A_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Como σ é estratégia vencedora no ponto-aberto, os abertos $A_0, A_1, ...$ não formam cobertura, ou seja, I vence o jogo de Rothberger. Por absurdo, suponha que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ seja cobertura, então se a cada rodada $n \in \mathbb{N}$ o jogador I no ponto-aberto jogar os pontos x_n, as respostas de II seriam $\sigma(x_1) = A_0$, $\sigma(x_1, x_2) = A_1$, $\sigma(x_1, x_2, x_3) = A_2, \ldots$ e I vencerá a partida, contrariando o fato de σ ser estratégia vencedora (lembre-se que σ vence independente de como o adversário jogar). □

Lema 1. *Seja σ uma estratégia para o jogador II no jogo de Rothberger. Existe $x \in X$ tal que para qualquer A aberto com $x \in A$ existe $\mathcal{C}$ cobertura para X tal que $\sigma(\mathcal{C}) = A$.*

Demonstração. Suponha que não, então para todo $x \in X$ existe A_x aberto com $x \in A_x$ tal que para toda cobertura $\mathcal{C}$, $\sigma(\mathcal{C}) \neq A_x$.
Mas considere então a cobertura $\mathcal{C} = \{A_x | x \in X\}$. Note que $\sigma(\mathcal{C}) = A_x$ para algum $x \in X$, o que contradiz a suposição. □

Teorema 4. *Se o jogador II tem uma estratégia vencedora no jogo de Rothberger, então I tem estratégia vencedora no ponto-aberto.*

Demonstração. Seja σ uma estratégia vencedora para o jogador II no jogo de Rothberger. Pelo lema, sabemos que existe $x_0 \in X$ tal que para todo aberto A_0 contendo x_0 existe uma cobertura $\mathcal{C}_0$ tal que $\sigma(\mathcal{C}_0) = A_0$; da mesma forma, existe $x_1 \in X$ tal que para todo aberto A_1 contendo x_1 existe uma cobertura $\mathcal{C}_1$ tal que $\sigma(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1) = A_1$, e assim por diante. Podemos assim construir a seguinte partida:

Rodada	I	II
1	x_0	$A_0 = \sigma(\mathcal{C}_0)$
2	x_1	$A_1 = \sigma(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1)$
3	x_2	$A_2 = \sigma(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$
4	x_3	$A_3 = \sigma(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Mas II está jogando com a estratégia vencedora de II no jogo de Rothberger, portanto $A_0, A_1, A_2, ...$ formam cobertura para X, o que implica vitória do jogador I. $\square$

Teorema 5. *O jogo de Rothberger é dual ao jogo ponto-aberto.*

Demonstração. I tem estratégia vencedora no ponto-aberto $\iff$ II tem estratégia vencedora no jogo de Rothberger, como provado nos teoremas 1 e 2.
I tem estratégia vencedora no jogo de Rothberger $\iff$ II tem estratégia vencedora no ponto-aberto, como provado nos teoremas 3 e 4. $\square$

Agora podemos entender plenamente em que sentido os dois jogos são o mesmo. Como vimos nas demonstrações anteriores, a partir de uma estratégia para um dos jogos podemos construir uma estratégia para o outro, mas só não dizemos que esses jogos são realmente iguais porque os papéis dos jogadores I e II se invertem.

6. Considerações finais

O que tentamos mostrar neste artigo é que os jogos topológicos não necessitam de conceitos avançados para começar a serem estudados, sendo possível uma progressão gradual, com jogos que requerem conceitos e técnicas cada vez mais sofisticados, mas ainda assim com resultados bastante interessantes. Além disso, é uma maneira mais tragável de se compreender vários conceitos, especialmente de topologia.
Outro ponto interessante, como mencionado na introdução, é que essa é uma área relativamente nova, portanto com pouco mais do que foi apresentado nesse artigo já é possível compreender alguns artigos e problemas em aberto, colocando o aluno rapidamente em contato com tópicos recentes de pesquisa.

Referências

[1] AURICHI, Leandro. Jogo de Rothberger. Disponível em: <http://www.icmc.usp.br/pessoas/aurichi/exerc/doku.php?id=lista:rothberger>. Acesso em: 19 jan. 2016.

[2] AURICHI, Leandro. Os jogos de Rothberger e o ponto aberto são duais. Disponível em: <http://www.icmc.usp.br/pessoas/aurichi/exerc/doku.php?id=lista:rothbergerpontoaberto>. Acesso em: 19 jan. 2016.

[3] GALVIN, Fred. Indeterminancy of point-open games, *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences*, v. 26, n. 5, p. 445-449, 1978.