

# Uma introdução muito introdutória aos espaços $n$ -dimensionais e suas formas

CINIRO APARECIDO LEITE NAMETALA\*

Instituto Federal de Minas Gerais - Campus Bambuí  
ciniro.nametala@ifmg.edu.br

---

## Resumo

*Para indivíduos que começam a estudar matemática, especialmente com problemas que envolvem otimização, a concepção de soluções em problemas multidimensionais pode ser de difícil entendimento. O pensamento abstrato necessário para entender que nem tudo está encarcerado nas três dimensões que visualmente percebemos, ao longo do tempo, se torna natural, entretanto, no início muitos alunos podem se deparar com fontes que tratam o tema sem preocupação alguma com didatismo. Este artigo é resultado das inúmeras vezes em que precisei introduzir este assunto em aulas que abordavam fundamentos em inteligência artificial, otimização e outros mais. Além de, adicionalmente, usar de recursos que busquei para mim mesmo quando tive necessidade de aprender conceitos que envolviam computação em espaços com  $n$  dimensões. Este trabalho, a meu ver, também pode ser adaptado por pessoas que queiram conversar com crianças sobre o tema. Eu mesmo já fiz isso e funcionou!*

---

## 1. INTRODUÇÃO

Imaginemos que você tenha um problema que precise resolver. Peço que, de preferência, não pense em um problema do tipo "como contar para minha mãe que gastei todo o dinheiro do mês com um ingresso de show" ou "como me livrar do vício em café". Imaginemos alguma coisa mais prática e simples, como por exemplo "Se eu não sofresse qualquer interrupção, quanto tempo levaria para assistir um filme com duas horas de duração?". A resposta é completamente óbvia e por isso, espero que você tenha acertado: 2 horas! Se não tiver acertado, você certamente não deve ter dormido bem na noite passada ou algo do tipo. Vá fazê-lo. Bom, agora vamos representar a solução deste problema graficamente como um ponto, esse mostrado a seguir na Figura 1.



**Figura 1:** Representação de uma solução ótima.

Perceba que este ponto é com certeza a solução, pois corresponde ao único valor possível a ser escolhido como resposta para a pergunta feita. Considere, portanto, que neste caso, não

---

\*Agradeço meus alunos do curso técnico em informática, da Engenharia de Computação e minhas sobrinhas Samira e Isis (com respectivamente sete e quatro anos de idade) por testarem o conteúdo aqui apresentado.

fosse possível, por exemplo, dar respostas diferentes mesmo que estas estivessem erradas. É um problema com apenas uma resposta.

Agora imaginemos um segundo problema, um pouco mais complicado, algo do tipo "Estou com medo de ET's e por isso estou pensando seriamente em dormir de luz acesa. Como deixo a lâmpada esta noite? Acesa ou apagada?". Bem, neste segundo problema, extremamente mais complexo, se você não for uma pessoa muito diferente das demais, só existirá uma solução plausível também: A luz acesa. Neste caso existem duas opções possíveis de se escolher. Logo, podemos pensar já no que é chamado "Espaço de Soluções". Neste caso temos um espaço de soluções com duas opções de solução: Acesa ou Apagada. Contudo, apenas uma delas é considerada a solução correta para o problema inicial, chegamos então, também, ao conceito de "Solução Ótima".

Você já deve ter entendido a brincadeira. O "Espaço de Soluções" é composto por todas as respostas possíveis para um problema, entretanto, dentre todas as possíveis só uma (ou às vezes mais de uma) pode ser considerada a melhor, esta seria a "Solução Ótima". Só para não perder o costume vamos também representar graficamente na Figura 2 o que acabamos de conversar sobre medo de ET's.

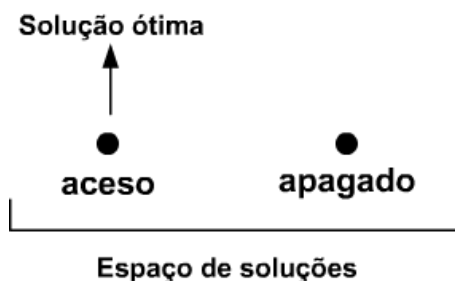


Figura 2: Representação de espaço de soluções.

Agora um terceiro problema. Imaginemos que você é um estudante, que mal tem dinheiro para cortar o cabelo e, por isso, paga de descolado com o cabelo grande quando na verdade é apenas um pobre coitado precisando de recursos financeiros. Imaginemos também que certo banco lhe convenceu a abrir uma conta universitária para sua mãe depositar dinheiro todo mês. E mais, você terá direito a um cheque especial! Logicamente, você prioritariamente bebe o dinheiro da sua mãe durante o mês em festas. Já o cheque especial, você usa esse em coisas supérfluas, como cortar o cabelo. Sua conta então é um problema! Qualquer valor menor que zero o leva para o cheque especial e, qualquer valor maior que zero, o deixa no azul. Já que estudantes não se preocupam com quanto dinheiro possuem na conta desde que tenham dinheiro na conta, podemos dizer que, neste caso, a solução ótima seria estar no azul, independente do valor, ao passo que, estar no cheque especial é uma alternativa possível, contudo, não podemos dizer que esta seria uma boa solução, independentemente também do quanto você já se afundou nela. Veja a representação gráfica que sua mãe deveria ter acesso na Figura 3.

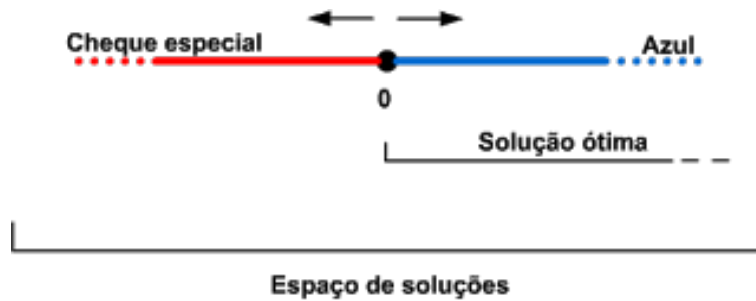


Figura 3: Representação de espaço de soluções contínuas.

Pode-se perceber que neste espaço de soluções não existe mais uma única opção. Em outras palavras, uma opção para algo do tipo: "Estar no azul é 5 reais" ou "Estar no cheque especial é -20 reais". Na verdade, para este tipo de problema, o espaço de soluções é composto de um intervalo, ou seja, qualquer valor menor ou igual a zero é considerado cheque especial, já qualquer valor maior que zero é o mesmo que estar no azul. Para problemas deste tipo dizemos que o mesmo possui "soluções contínuas", ao passo que os anteriores exemplificados são ditos de "soluções discretas". Logicamente, para o problema da conta, a solução ótima corresponde a qualquer valor maior que zero, afinal, você não estaria nesse caso devendo ninguém.

Vamos imaginar agora um problema discreto, com um espaço de soluções maior e que só tenha uma solução ótima. O problema é "Qual o melhor clube de futebol brasileiro?". Apesar da resposta ser "fácil" de se dar, o espaço de soluções aqui é relativamente grande em relação ao problema dos ET's ou da conta, afinal, antes de mais nada, para apontar o melhor clube do futebol brasileiro, ou seja, a solução ótima, precisaríamos conhecer antes todas as soluções existentes no espaço, determinando assim quais são todos os clubes de futebol deste país. Sabemos que são muitos os clubes. Cada cidade tem o seu e, às vezes, mais de um. Entretanto, para fins didáticos, separe apenas os dos estados de Minas Gerais e São Paulo que estão na série A. Para cada um deles atribua um número que funcionará como um código (só para não ter que escrever o nome inteiro do clube). Vamos representar isso graficamente na Figura 4.



Figura 4: Representação de espaço de soluções discretas.

Nosso espaço de soluções agora possui 6 alternativas, só uma é a ótima: O Galão da massa! Você poderia até escolher outra solução, mas quando a solução que encontramos não é a ótima, chamamos isto ainda de solução, contudo, neste caso específico, de "Solução ruim".

Espaços de solução podem conter inúmeras soluções ruins que podem ser escolhidas, contudo, para muitos problemas, o desafio é se encontrar qual é a melhor, a solução ótima. Neste sentido,

pense na resposta para mais está questão "Quantas peças de louça se encontram agora sujas em sua pia esperando para serem lavadas?". Certamente que são muitas. Mas não pense no número em si, pense no espaço de soluções. Qual o tamanho deste espaço de soluções? Bom, podemos dizer que ele variará entre o mínimo, que seria de zero peças na pia, até o máximo de peças que você possui em sua casa. Vamos tomar este valor máximo aqui como 100. Bom, então são 100 soluções possíveis para o problema, de zero a cem peças na pia. Se a quantidade correta de peças na pia for, por exemplo, de 30, então 30 é a solução ótima. Assim, você responderia exatamente o valor correto de peças na pia esperando para serem lavadas. Mas pense no seguinte, se você chutasse 28, 29 ou 31, 32 peças? Estaria errado? São valores muito próximos do correto! Nestes casos, dizemos que apesar de não serem a solução ótima, essas soluções são quase isso. Ou seja, as soluções que são muito próximas da ótima são boas, são "quase" ótimas, e, por isso, damos ao conjunto destas o nome de "vizinhança do ponto ótimo".

Muitos problemas podem admitir que você encontre uma solução vizinha à ótima e assim, mesmo não obtendo a solução ótima, se dar por satisfeito, como no caso da pia onde existem soluções aceitáveis, mas diferente no caso do time de futebol que só tem uma solução aceitável que é o Galo<sup>1</sup>! Veja o gráfico da Figura 5 que representa o espaço de soluções da pia.



Figura 5: Representação de vizinhança à solução ótima.

## 2. ESPAÇOS DE SOLUÇÃO MULTIDIMENSIONAIS

OK. Você agora já domina diversos conceitos fundamentais sobre espaços de solução. Vamos mudar agora um pouco a direção da nossa linha de raciocínio. Perceba que todos os problemas citados anteriormente abordaram o uso de apenas um valor como solução ótima para um dado problema:

- A duração do filme pode assumir UM valor apenas. Ex: [2 horas].
- A condição que a lâmpada pode assumir é de UM estado apenas. Ex: [apagada].
- A sua conta pode assumir somente UM status. Ex: [azul] mesma coisa que [maior que zero].
- O clube de futebol pode ser apenas UM. Ex: [Galo].
- A pia da sua casa só pode ter UMA quantidade de peças. Ex: [30].

Veja que a solução escolhida (independente de ser ruim, mais ou menos, quase ótima ou ótima) é composta de apenas UM valor, ou seja, apenas uma variável unidimensional está associada

<sup>1</sup>Você já deve ter percebido que o autor deste texto é torcedor do Atlético Mineiro. Obviamente é uma analogia, você pode trocar Atlético Mineiro pelo seu time do coração se quiser.

ao conjunto que compõe a solução ótima! Dizemos nestes casos que a solução para o problema possui apenas uma dimensão! Entretanto, é muito comum que diversos problemas assumam situações onde a resposta é composta de mais de uma dimensão, como é a situação descrita no próximo parágrafo.

Assuma que você quer comprar um chuveiro para tomar banho, pois você descobriu que isso faz bem para a saúde. Você resolve que quer comprar um chuveiro que custe menos de 40 reais e que pese menos que 45 quilos. É um problema com soluções contínuas. Para incrementá-lo, digamos que a solução ótima seria um chuveiro que tenha exatamente 20 quilos e que seja distribuído gratuitamente pela prefeitura, ou seja, custe zero. Se você observar o gráfico da Figura 6, vai notar que o espaço de soluções neste caso é composto de todos os valores possíveis para pesos e preços acima de zero. Já as soluções vizinhas ao ponto ótimo são todos os pontos contidos na área colorida em verde. Qualquer ponto neste subespaço poderia ser considerado como solução aceitável. Por fim, a solução ótima é o ponto marcado em azul. Em todo o restante do espaço pode-se considerar que só existem agora sobrando soluções ruins, não aceitáveis. Estas não são consideradas nem ótimas e nem aceitáveis, pois quebram a restrição imposta para custo (deve ser menos que 40 reais) e peso (deve ser menos que 45 quilos). Perceba, finalmente, que a solução do seu problema neste caso é composta de dois valores únicos: um custo e um peso. Uma solução aceitável para o problema, por exemplo, seria  $[30,40]$ . Ruim seria, por exemplo,  $[50,55]$ . A solução ótima, como já dito é  $[0,20]$ . Este é um problema com duas dimensões e que pode ser representado graficamente em um espaço plano bidimensional.

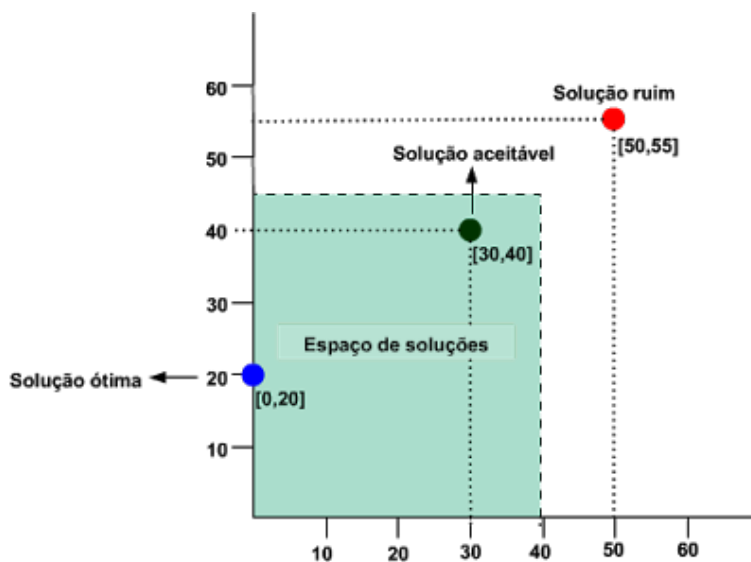
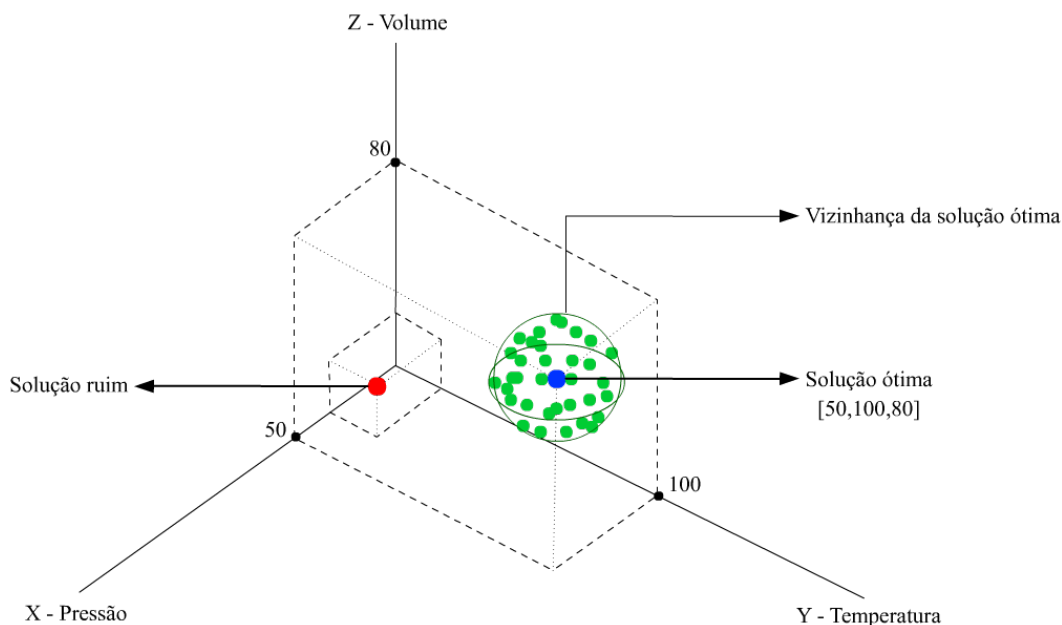


Figura 6: Espaço de soluções de duas dimensões.

Estamos quase concluindo. Pense agora em problemas que trabalhem com três dimensões, isto é, três valores compondo suas soluções. Conseguiu imaginar algum? Segue mais um exemplo. Você poderia querer determinar em qual ponto sua panela de pressão cozinha mais rápido aquele saco de batatas que está lá na sua geladeira desde o último *reveillon*. Você então faz inúmeros testes com inúmeras panelas e percebe que, depois de voltar ao cheque especial e ser o primeiro colecionador de panelas de pressão do universo, o melhor ponto é encontrado quando a pressão da panela é  $50 Pa$ , sua temperatura é  $100^{\circ}C$  e a panela têm volume de  $80 cm^3$ . Ou seja, a solução encontrada é  $[50, 100, 80]$ . São 3 dimensões do espaço. Vamos também colocar isso representado

graficamente, como na Figura 7.



**Figura 7:** Espaço de soluções de três dimensões.

Perceba a solução ótima em azul no espaço de soluções. Ao redor da solução ótima, obviamente, existem inúmeros outros pontos que poderiam ser marcados. Todos eles vizinhos a solução ótima. Estes são os considerados aceitáveis e estão coloridos em verde. Já soluções muito afastadas da ótima seriam, como já discutido, soluções ruins, como aquela colorida de vermelho também na Figura 7.

### 3. REPRESENTAÇÕES MULTIDIMENSIONAIS

Ao assumirmos que a maioria dos problemas existentes neste universo podem ser modelados numericamente com o uso de dimensões, podemos considerar que, para problemas que usem até três, um gráfico é ferramenta viável de representação do espaço de soluções. Evidência disso é que usamos vários até aqui.

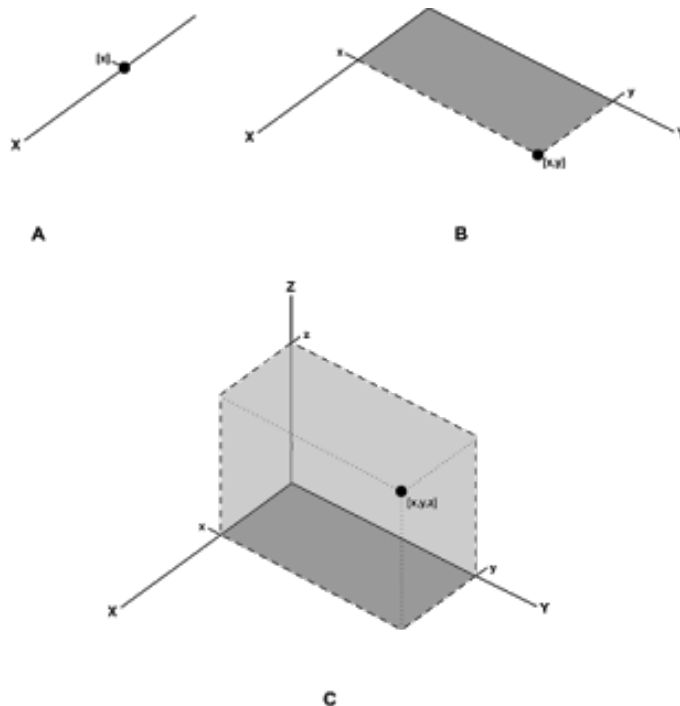
Já para problemas com mais que três dimensões? Como eles seriam representados?

Você já deve ter reparado que se seguirmos a sequência lógica até agora levada em conta, torna-se completamente compreensível a existência de problemas em que as soluções não sejam compostas de apenas três valores, mas de quantos forem necessárias. Soluções para problemas que deveriam ser representadas com o uso de quatro dimensões, cinco, seis, cem, um milhão. Quantas variáveis quaisquer estiverem envolvidas no problema. Mas a pergunta continua: E se eu quisesse representar então minha solução no espaço? Como eu faria?

Antes, precisamos averiguar como é composto o espaço que percebemos em três dimensões.

É seguro afirmar que o posicionamento de um ponto num espaço de soluções unidimensional pode ser alterado movimentando-se este de um lado para o outro em uma reta, seja para direita ou para esquerda (chamaremos isso de eixo X). Assim, representaríamos a solução no espaço de uma dimensão (como na Figura 8-A). Se incluirmos mais um ponto a ser marcado no espaço,

então precisaríamos adicionar uma nova reta de forma perpendicular a já existente. Inserimos assim então, um novo espaço que também permitirá variar o valor para a esquerda ou para direita (chamaremos isso de eixo Y). Obtemos dessa forma um espaço de duas dimensões (como na Figura 8-B). A regra até aqui é a de que, cada nova dimensão precisa ser incluída de forma perpendicular as já existentes. Se formos colocar mais uma, sobra apenas a possibilidade da variação no sentido cima-baixo e baixo-cima, logo, adicionamos a última reta possível no espaço criando uma terceira dimensão (chamaremos isso de eixo Z)(como na Figura 8-C). E agora? Se resolvermos incluir uma quarta? Sabemos que ela precisa variar de um lado para o outro e que tem que estar perpendicular as já existentes. Essa é a regra. Mas como fazer isso?



**Figura 8:** Construção de um espaço de 3 dimensões no espaço como o conhecemos.

Se essa é a regra de fato, logo percebemos que, no espaço como o conhecemos, não conseguimos adicionar uma nova reta, ou seja, não podemos representar graficamente uma quarta dimensão no espaço se a reta precisar ser colocada perpendicularmente às outras. Em algumas representações podemos adicionar novas dimensões mas não utilizando o espaço em si (uma reta). Para isso você poderia, por exemplo, determinar que a cor do ponto no espaço seria correspondente a um valor, ou que a forma como esse ponto é representado no espaço seria corresponde a outro valor, assim seria possível representar até 5 dimensões, como visto na Figura 9. Fazer isso pode ser interessante para mostrar um cérebro e suas áreas, contudo, forma e cor não são tão úteis, pois visualmente são limitadas. Veja, cores podem variar numa quantidade máxima e, para algumas pessoas, podem não ser fáceis de identificar. As formas podem gerar problemas em grupos misturados, além do que, sendo forma ou sendo cor, você precisaria manter um dicionário de correspondência. Esses dois recursos não agem com a mesma elegância que possui uma régua já que nesta basta realizar uma verificação visual simples. Ademais, imagine então um espaço de 6 dimensões ou mais que isso, com  $n$  dimensões ( $n$  aqui quer dizer quantas dimensões você quiser). Você não poderia usar

mais as formas de representação anteriormente discutidas, pois já gastou eixo X, eixo Y, eixo Z, cor e forma.

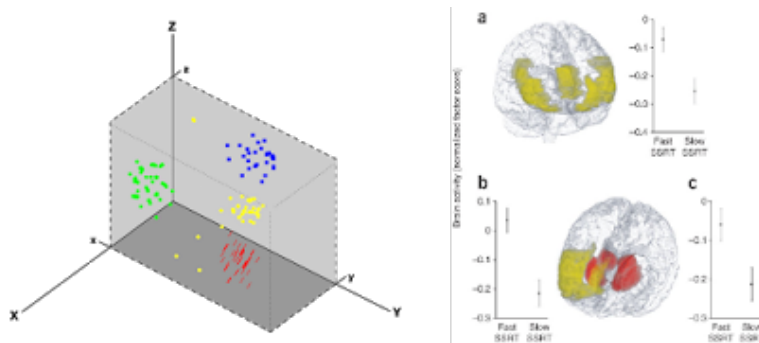


Figura 9: Extrapolação das dimensões espaciais para representação de dados.

Os estudos mais avançados nessa área são quase sempre feitos por estatísticos, afinal, geralmente são eles que trabalham com dados mais do que ninguém. Muitos trabalhos científicos foram desenvolvidos no sentido de repensar esse problema. Diversas alternativas utilizando junções de gráficos diversos, como em [Grinstein, 2001], ou simplificação de gráficos existentes, como em [Freitas, 2001], são comumente observados em diversas pesquisas. Existe inclusive um trabalho famoso desenvolvido pelo pesquisador Herman Chernoff que propôs a utilização de esquemas que simulam a face humana [Chernoff, 1973] para representar graficamente espaços e soluções n-dimensionais. A ideia é que a quantidade de informações passadas pela expressão humana é muito maior que qualquer uma representada em gráficos e, além disso, faces são compreensíveis por todos, até bebês. Um manual para o uso das *Faces de Chernoff* pode ser visto em [Bruckner, 1978].

#### 4. A FORMA DA DIMENSÃO N

Não é absurdo pensar na ideia de que tudo que podemos imaginar advém de coisas que já observamos em algum momento durante nossas vidas. Isto é, tudo que possuímos capacidade de conceber visualmente, na verdade, são apenas derivações de elementos mais simples que empregamos em conjunto para imaginarmos formas, cores e movimentos. Se nunca vimos um espaço maior que o tridimensional, então estaríamos sujeitos a nunca, em nenhum momento da história da humanidade, conseguirmos visualizar um espaço com mais dimensões que isso, apesar de, como você bem ter visto, existirem (conceitualmente) sim essas outras dimensões. Neste raciocínio, estas só não poderiam ser visualizadas, pois somos seres que percebem apenas, fisicamente falando, três dimensões no espaço.

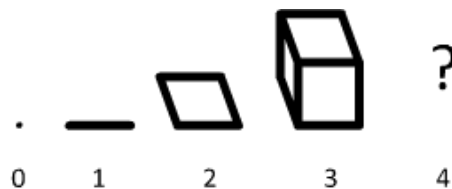
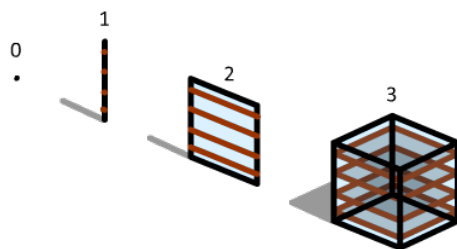


Figura 10: Lógica sequencial para visualização da quarta dimensão.



Essa verdade sobre dimensões<sup>2</sup> trás a tona algumas reflexões. Uma delas é que, por exemplo, ao se pôr um cubo 3D contra a luz, este projetará uma sombra em formato de quadrado 2D. Já se uma forma quadrada for posta de pé sob a luz (conforme mostrado na Figura 11), esta, por sua vez, também projetará uma pequena parte de si como sombra, mas neste caso, uma linha, uma forma 1D. Sendo assim, seria razoável pensarmos que uma forma de 4 dimensões projetaria como sombra, por consequência, um volume 3D, como o cubo por exemplo. Outro ponto a se pensar é que, se somos seres que percebem apenas três dimensões e, por ventura, assumirmos que existiriam hipotéticos seres que fossem capazes de ver em quatro dimensões, é também lógico assumirmos que, da mesma forma que vemos formas 1D ou 2D achatadas (como as sombras), eles também nos veriam assim, achatados. Afinal, estaríamos uma dimensão abaixo da qual eles existiriam. O raciocínio é o mesmo ao entender que você só pode ser gordo pois percebe um eixo de profundidade como o Z. Nos eixos X ou Y somente, pelo menos para nós humanos, o conceito de gordo ou não existe, ou de algum modo não podemos percebê-lo. Veja que até aqui só falamos de uma possível existência de quatro dimensões. Imagine agora n!



**Figura 11:** Sombras projetadas por figuras uni, bi e tridimensionais.

Esse jogo de pensar, como feito no caso das sombras de cada dimensão, deu origem ao conceito de Hiper cubo. O Hiper cubo é uma forma difícil de ser imaginada fisicamente por nós. Teoricamente no hiper cubo, ao realizar-se numa de suas dimensões um corte transversal, seriam obtidas formas volumétricas uniformes de 3 dimensões. Algo similar ao fato de que, ao se cortar um cubo o mais fino possível transversalmente, você obteria então um quadrado (pense em você cortando um pedaço de bolo de forma bem fina). O mesmo deve ocorrer se você cortar transversalmente e o mais fino possível um quadrado. Nesse caso espera-se que você obtenha uma linha (pense no corte de uma massa de macarrão esticada sob uma mesa). O Hiper cubo aborda o conceito de conexões e existem alguns vídeos na internet (como esse da referência [Wolfram M., 2017]) que propõe formas parcialmente "visualizáveis" para ele. Recentemente uma abordagem n-dimensional de hiper cubo foi explorada no filme Interestelar [Interestelar, 2017] do diretor Christopher Nolan quando o ator principal, interpretador pelo ator Matthew McConaughey, fica preso dentro de um buraco negro. Outras abordagens de visualização para hiper cubos, demonstradas formalmente, podem ser vistas num recente estudo desta referência [Miwa et. al., 2017]

## 5. CONCLUSÃO

Existem métodos que só funcionam, pois matematicamente é completamente possível e viável trabalhar-se com espaços n-dimensionais. Quando pensamos em mais de três dimensões, diversas propriedades novas aparecem. Essas novas propriedades podem ser aplicadas para resolver

<sup>2</sup>É importante ressaltar que em áreas específicas de estudo podem existir definições diferentes para dimensão. Este trabalho não trata dessas outras definições.

problemas complexos, problemas para os quais três dimensões são insuficientes. Uma informação importante é que você não deveria se surpreender se descobrir que a grande maioria dos problemas realmente interessantes e práticos envolvem muito mais que três dimensões. Isso é especialmente verdade quando pensamos em reconhecimento de padrões, classificação de grupos em conjuntos de dados imensos, otimização, astrofísica, diagnóstico de doenças e muito mais. Matemáticos já exploram essas propriedades desde séculos atrás.

Por fim, ao final deste texto que teve por objetivo tentar encontrar a "Solução ótima" do didatismo e facilidade de entendimento de um assunto que, para iniciantes, pode ser aparentemente complicado, vou parafrasear o professor e astrônomo Roberto Silvestre:

"Acredite, o seu corpo físico está confinado em um espaço de somente três dimensões, mas a sua mente, de natureza imaterial, esta não precisa ficar encarcerada nele."  
[Silvestre, 2017].

### REFERÊNCIAS

- [Grinstein, 2001] Grinstein, Georges, Marjan Trutschl e Urška Cvek (2001). High-dimensional visualizations. *In: Proceedings of the Visual Data Mining Workshop, KDD*.
- [Freitas, 2001] Freitas, C. M. D. S., Chubachi, O. M., Luzzardi, P. R. G. e Cava, R. A. (2001). Introdução à visualização de informações. *Revista de informática teórica e aplicada. Porto Alegre. Vol. 8, n. 2, 143-158*.
- [Bruckner, 1978] Bruckner, Lawrence A (1978). On chernoff faces. *In: Graphical representation of multivariate data, 93-121*.
- [Chernoff, 1973] Chernoff, H. (1973). The use of faces to represent points in k-dimensional space graphically. *Journal of the American Statistical Association, 68(342), 361-368*.
- [Miwa et. al., 2017] Miwa, T., Sakai, Y. e Hashimoto, S. (2017). Learning Four-dimensional Spatial Representations through Perceptual Experience with Hypercubes. *IEEE Transactions on Cognitive and Developmental Systems*.
- [Wolfram M., 2017] Wolfram Mathematica. (2017). [online] Rotating a Hypercube in 4D. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=ZeViN9cM2tk>>. *Wolfram Mathematica - Youtube Channel. Acessado em 25/11/2017*.
- [Interestelar, 2017] IMDB. (2017). [online] Página do filme Interestelar. Disponível em <<http://www.imdb.com/title/tt0816692/>>. *Acessado em 25/11/2017*.
- [Silvestre, 2017] Silvestre, Roberto F. (2017). [online] Astronomia - Uma proposta para o terceiro milênio. Mais de três dimensões?. Disponível em <<http://www.silvestre.eng.br/astrologia/artigos/bigbang/02/>>. *Acessado em 25/11/2017*.