Os Irracionais como um Produto

Vinicius de Oliveira Rodrigues

Universidade de São Paulo

vinicius.oliveira.rodrigues@usp.br

Resumo

Mostraremos que o conjunto dos números irracionais é homeomorfo ao conjunto das sequências de números naturais com suas respectivas topologias usuais.

1. Introdução

Um fato bastante conhecido por matemáticos conjuntistas, porém raramente provado com todos os detalhes, é o de que o conjunto dos números irracionais é homeomorfo ao espaço das sequências de números naturais, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Tal fato é surpreendente: $\mathbb{N}, \mathbb{N}^2, \mathbb{N}^3, \mathbb{N}^4, \ldots$ são todos espaços infinitos, enumeráveis e com topologia discreta, logo, são todos topologicamente equivalentes: qualquer bijeção entre quaisquer um deles é um homeomorfismo! Esses são os conjuntos das 1-uplas, 2-uplas, 3-uplas, 4-uplas... de números naturais. Porém, se considerarmos o espaço de todas as sequências infinitas de números naturais (com licença poética, as infinito-uplas de números naturais, ou, para incomodar menos pessoas, as infinito-uplas enumeráveis de números naturais), o que obtemos é surpreendentemente o conjunto dos números irracionais, um velho conhecido de todos que concluíram o ensino médio.

A prova deste fato é conhecida e indicada em vários livros textos, porém raramente é feita com todos os detalhes. Um dos lugares onde uma indicação da prova aqui expressa pode ser encontrada é no livro General Topology de S. Willard [4].

Os pré requisitos para a leitura desse artigo são: conhecer o Teorema dos Intervalos Encaixantes, ter noções básicas de topologia geral (o que inclui o conhecimento de o que é um espaço topológico, uma base para um espaço topológico, uma função contínua entre espaços topológicos e um homeomorfismo), noções sobre conjuntos enumeráveis e um certo traquejo ao se lidar com construções recursivas. Conhecimentos sobre sequências decorrentes por exemplo de uma primeira metade de um curso de análise real ajudam a visualizar a construção.

2. O espaço das sequências de números naturais

Usaremos algumas notações conjuntistas que merecem alguma explicação. Se A, B são conjuntos, define-se A^B como sendo o conjunto de todas as funções de B em A. Então $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é o conjunto de todas as sequências de números naturais. Consideraremos que 0 é um número natural.

Além disso, um número natural n é o conjunto de todos os números naturais anteriores, ou seja, $0 = \emptyset$, $1 = \{0\}$, $2 = \{0, 1\}$... Em geral, um número natural n coincide com o conjunto $\{m \in \mathbb{N} : m < n\}$[†] .

Dessa forma, se A é um conjunto, A^n é o conjunto das funções de $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ em A. Uma função s com domínio n pode ser denotada por $s = (s_0, \ldots, s_{n-1})$ onde s_i é outra notação para $s(i)$.

[†] Em Teoria dos Conjuntos os números naturais de fato são construídos de modo a satisfazer essa relação. Essa construção se deve a Von Neumann [1]. O leitor interessado pode consultar o capítulo 3 de [2].

Perceba que nesse caso, s pode ser pensado como uma n-upla, de modo que A^n é simplesmente o conjunto das n-uplas de A.

Uma das vantagens desta notações é que se $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é uma função e n um número natural, então $f|n = (f(0), \ldots, f(n-1))$ é uma n-upla de elementos de A, ou seja, $f|n \in A^n$.

No geral, quando temos um espaço topológico X e um conjunto A, há uma topologia padrão para o espaço X^A de todas as funções de A em X denominada topologia produto. Nós não assumiremos esse conhecimento do leitor. O que vamos fazer é dizer qual é uma base para essa topologia para o caso particular em que $A = X = \mathbb{N}$. O leitor que tiver conhecimento sobre topologia produto pode verificar que a topologia que definiremos aqui coincide com a topologia produto. Abaixo, definiremos a topologia de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Primeiro, vamos inserir algumas outras definições.

Definição 1. Dado um conjunto A, o conjunto de todas as sequências finitas não vazias de A é o conjunto $\mathrm{Seq}(A) = \bigcup_{n \geq 1} A^n$. Um elemento de $\mathrm{Seq}(A)$ é chamado de sequência finita (não vazia) de A. Se $s \in \mathrm{Seq}(A)$, o comprimento de s, denotado por $|s|$, é o domínio de s. Ou seja, se $s : n \to A$, então $|s| = n$ e s é uma $|s|$-upla.

Se $s \in \mathrm{Seq}(\mathbb{N})$ define-se o cone determinado por s como sendo $V_s = \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} : f||s| = s\}$. Intuitivamente, V_s é o conjunto de todas as sequências de números naturais que começam com s.

O conjunto dos cones é definido como sendo $\mathcal{C} = \{V_s : s \in \mathrm{Seq}(A)\}$.

Finalmente, se $s, t \in \mathrm{Seq}(A)$, então a concatenação $s^\frown t \in \mathrm{Seq}(A)$ é a sequência de domínio $|s| + |t|$ tal que $s^\frown t(n) = s(n)$ para todo $n < |s|$ e $s^\frown t(n) = t(n - |s|)$ se $|s| \leq n < |s| + |t|$. Intuitivamente, a concatenação de duas sequências consiste em justapô-las uma após a outra. Por exemplo, $(2, 3, 1)^\frown(2, 3) = (2, 3, 1, 2, 3)$.

O conjunto dos cones determina uma topologia em $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ para a qual ele é base (mostraremos isso). Lembremos da proposição abaixo vista em cursos e textos básicos de Topologia Geral:

Proposição 2. Seja X um conjunto e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ uma coleção de subconjuntos de X que satisfaz:

1. Para todo $x \in X$ existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $x \in A$, e
2. Para todos $A, B \in \mathcal{B}$ e para todo $x \in A \cap B$ existe $C \in \mathcal{B}$ tal que $x \in C \subseteq A \cap B$.

Então existe uma única topologia τ em X tal que $\mathcal{B}$ é uma base para τ.*

Utilizaremos esta proposição para mostrar que o conjunto dos cones forma uma base para uma topologia em $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Proposição 3. A respeito de cones:

1. Se $s, t \in \mathrm{Seq}(A)$ e existe $n < \min\{|s|, |t|\}$ tal que $s(n) \neq t(n)$, então $V_s \cap V_t = \emptyset$.
2. Se $s, t \in \mathrm{Seq}(A)$, $|s| \leq |t|$ e para todo $n < |s|$ temos que $s(n) = t(n)$, então $V_s \cap V_t = V_t$.
3. $\mathcal{C}$ é uma base para uma topologia em $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Demonstração. Para a primeira afirmação, suponha por absurdo que existe uma sequência f na interseção e seja n como no enunciado. Como $f \in V_s$ e $f \in V_t$, segue que $s(n) = f(n) = t(n)$, o que é absurdo.

Para a segunda afirmação, basta ver que $V_t \subseteq V_s$. Suponha que $f \in V_t$. Devemos ver que $f \in V_s$. Dado $n < |s|$, temos por hipótese que $f(n) = t(n) = s(n)$, assim, segue a tese.

* Uma demonstração da Proposição 2 pode ser encontrada em [4], Teorema 5.3.

Para a terceira afirmação aplicaremos a proposição anterior. Suponha que $s, t \in \text{Seq}(\mathbb{N})$. Sem perda de generalidade, temos que $|s| \leq |t|$. Suponha que f é tal que $f \in V_s \cap V_t$. Como a interseção é não vazia (pois f está nela), segue da afirmação (1) que para todo $n < |s|$, $s(n) = t(n)$. Assim, da afirmação 2, $V_t = V_s \cap V_t$. Logo, $f \in V_t = V_s \cap V_t$. Como os elementos de $\mathcal{C}$ e f são arbitrários, a afirmação segue da proposição anterior. $\square$

O leitor que tiver conhecimento sobre a topologia produto de (infinitos) espaços topológicos pode verificar que a topologia que demos para $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ nada mais é do que a topologia produto usual de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} = \prod_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{N}$. Esse fato, porém, não é necessário para acompanhar a leitura do artigo.

3. O homeomorfismo

Denotaremos o conjunto dos números irracionais por $\mathbb{I}$.

Um intervalo (real) aberto de extremos racionais é um conjunto da forma $(p, q) = \{x \in \mathbb{R} : p < x < q\}$ com $p < q$, $p, q \in \mathbb{Q}$.

Se $a < b$, os extremos do intervalo aberto (a, b) são a e b, e o comprimento é $b - a$. Analogamente, define-se comprimento e extremos de um intervalo fechado.

Utilizaremos o seguinte teorema:

Teorema 4 (Teorema dos Intervalos Encaixantes)**.** Seja $(I_n : n \in \mathbb{N})$ uma sequência de intervalos compactos em $\mathbb{R}$ tal que para todo n, $I_{n+1} \subseteq I_n$. Então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset$. Além disso, se o comprimento desses intervalos tende à 0, temos que a interseção possui exatamente um número real.[†]

Teorema 5. $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ é homeomorfo à $\mathbb{I}$.

Demonstração. Como o conjunto dos números racionais é enumerável, podemos escrever $\mathbb{Q} = \{r_n : n \geq 1\}$.

Definiremos uma família de intervalos $(I_s : s \in \text{Seq}(\mathbb{N}))$ com as seguintes propriedades:

1. Para cada $s \in \text{Seq}(\mathbb{N})$, I_s é um intervalo aberto de extremos racionais de comprimento $\leq \frac{1}{|s|}$.
2. Para todo $n \geq 1$ e para todos $s, t \in \mathbb{N}^n$ com $s \neq t$, $I_s \cap I_t = \emptyset$.
3. Para todos $s, t \in \text{Seq}(\mathbb{N})$, se $|s| \leq |t|$ e $s = t\big|\,|s|$, então $I_t \subseteq I_s$.
4. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{s \in \mathbb{N}^n} I_s \subseteq \mathbb{Q}$,
5. Para todo $n \geq 1$, $r_n \notin \bigcup_{s \in \mathbb{N}^n} I_s$,
6. Para todo $n \geq 2$, r_{n-1} não é extremo de nenhum I_s para s $\in \mathbb{N}^n$.

Antes de provar que uma tal família existe, vamos explicar qual a ideia por trás dela e então utiliza-la para completar a prova. Assim, vamos parar a prova por um momento para entrar em uma digressão levemente informal sobre o que está acontecendo.

[†] Uma demonstração do Teorema 4 pode ser encontrada em [3] (Capítulo 2, Teorema 4).

Suponha que uma família como acima existe. Temos que $(I_s : s \in \mathbb{N}^1)$ é uma família de intervalos abertos de extremos racionais que, por (2), são dois a dois disjuntos mas que por (4), só "deixa de fora" alguns racionais e por (5), não inclui r_1.

Já $(I_s : s \in \mathbb{N}^2)$, por (3), é uma família de intervalos que refina $(I_s : s \in \mathbb{N}^1)$ (por exemplo, $I_{(2,3)}$ está contido em I_2). Essa família deixa de fora apenas alguns racionais (por (4)), não inclui o r_2 (por (5)), mas também não inclui o r_1 pois se r_1 estivesse em algum I_s com $s \in \mathbb{N}^2$, também estaria em $I_{s|1}$, o que violaria (5) para $n = 1$.

No n-ésimo refinamento, o elemento r_n é deixado de fora por (5) e tamanho dos intervalos diminui por (1). Assim, dada $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, a família $(I_{f|n} : n \geq 1)$ é, por (3), uma sequência decrescente de intervalos abertos de extremos racionais. Como o comprimento dos intervalos converge para 0, a interseção de todos eles possui no máximo um ponto. Se garantirmos que a interseção é não vazia, esse ponto deverá ser irracional já que qualquer racional é da forma r_n e por (5) este não está em $I_{f|n}$. O item (6), que até agora não foi mencionado, garante que a interseção é não vazia, conforme mostraremos. Definiremos a função que levará uma f no ponto correspondente a interseção acima e mostraremos que ela é um homeomorfismo.

(2) servirá para garantir que as interseções vindas de funções diferentes gerarão irracionais diferentes, e (4) serve para garantir que em cada estágio n, cada irracional de $\mathbb{R}$ estará em um intervalo do estágio, o que garantirá a sobrejetividade do homeomorfismo.

Suponha que existe uma família como acima. Nós a usaremos para concluir a prova. Dado s, $\mathrm{cl}\, I_s$ é o intervalo fechado de mesmos extremos que I_s. Fixe $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Note que $\bigcap_{n \geq 1} I_{f|n} \subseteq \bigcap_{n \geq 1} \mathrm{cl}\, I_{f|n}$. Veremos que ambas as interseções são um (mesmo) conjunto unitário.

Por (1), ambas as interseções tem no máximo um ponto. Por (3), ambas as interseções são de intervalos encaixantes. Pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes, a segunda interseção é não vazia. Seja r o único elemento dessa interseção. Veremos que r também é um elemento da primeira interseção.

Afirmação: r é irracional. Se fosse racional, teríamos que $r = r_m$ para algum $m \geq 1$. Temos que $r \notin I_{f|m}$ por (5), e, portanto, $r \notin I_{f|(m+1)}$ por (3), e também, $r \notin \mathrm{cl}\, I_{f|(m+1)}$ por (6), assim, teríamos que $r \notin \bigcap_{n \geq 1} \mathrm{cl}\, I_{f|n}$, o que é absurdo. Logo, r é irracional.

Dado $n \geq 1$, $r \in \mathrm{cl}\, I_{f|n}$, e, portanto, $r \in I_{f|n}$, do contrário teríamos que $r \in \mathrm{cl}\, I_{f|n} \setminus I_{f|n}$, mas esse último conjunto é o conjunto dos dois extremos de $I_{f|n}$, que são números racionais. Logo, $r \in \bigcap_{n \geq 1} I_{f|n}$.

Agora definiremos o homeomorfismo. Seja $\phi : \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{I}$ tal que $\phi(f)$ é o único ponto de $\bigcap_{n \geq 1} I_{f|n}$, que, como vimos, é irracional. Afirmo que ϕ é um homeomorfismo.

- ϕ é injetora: se $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ são distintas, seja n o primeiro número natural tal que $f(n) \neq g(n)$. Seja $s = f|n = g|n$. Por (2), $I_{f|(n+1)} \cap I_{g|(n+1)} = \emptyset$, logo, como $\phi(f)$ está no primeiro e $\phi(g)$ no segundo, segue que $\phi(f) \neq \phi(g)$.

- ϕ é um mapa aberto: dado um aberto básico V_s para algum $s \in \mathrm{Seq}(\mathbb{N})$, afirmo que $\phi[V_s] = I_s \cap \mathbb{I}$, que é um aberto de $\mathbb{I}$. Dado $f \in V_s$, sendo $l = |s|$ temos que $f|l = s$, e, portanto, temos que $\phi(f) \in I_s = I_{f|l}$. Além disso, já vimos que $\phi(f)$ é irracional. Assim, segue a inclusão $\subseteq$.

  Verifiquemos a outra inclusão: seja $r \in I_s$ um irracional. Por (4), para cada $n \geq 1$ existe $s_n \in \mathbb{N}^n$ tal que $r \in I_{s_n}$. Afirmo que se $n \leq m$ então $s_n = s_m|n$. Se isso não for verdadeiro para alguns n, m, então por (2) teremos que $I_{s_n} \cap I_{s_m|n} = \emptyset$, mas então por (3), $I_{s_m} \subseteq I_{s_m|n}$, concluindo que

$I_{s_n} \cap I_{s_m} = \emptyset$, o que viola o fato de r estar nessa interseção. Além disso, temos que $s_l = s$, pois do contrário, teríamos que I_{s_l} e I_s seriam disjuntos, o que viola o fato de r estar em ambos.

Seja $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ dada por $f(n) = s_{n+1}(n)$ para todo n. Temos que dado $m \in \mathbb{N}$, $f|m = s_m$, pois dado $n < m$, temos que $f(n) = s_{n+1}(n) = s_m(n)$ pela observação anterior. Temos portanto que $r \in \bigcap_{n\geq 1} I_{f|n} = \bigcap_{n\geq 1} I_{s_n}$, o que nos mostra que $r = \phi(f)$. Temos que $f \in V_s$ pois $f|l = s_l = s$, o que completa a prova da inclusão.

- ϕ é sobrejetora: dado r um irracional qualquer, por (4) existe $s \in \mathbb{N}^1$ tal que $r \in I_s$. Na prova de que ϕ é um mapa aberto, vimos que $\phi[V_s] = I_s \cap \mathbb{I}$, logo, existe $f \in V_s$ tal que $\phi(f) = r$.

- ϕ é contínua: fixe $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, seja $r = \phi(f)$ e seja $\epsilon > 0$. Devemos ver que existe uma vizinhança V de f tal que $\phi[V] \subseteq (r-\epsilon, r+\epsilon)$. Seja $n \geq 1$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Escrevamos $I_{f|n} = (a,b)$. Temos que $|b-a| \leq \frac{1}{n}$. Logo, como $r \in (a,b)$, se $x \in (a,b)$ segue que $a < x, r < b$, e, portanto, $|x-r| < \frac{1}{n} < \epsilon$. Temos que $V_{f|n}$ é uma vizinhança de f. Afirmo que $\phi[V_{f|n}] \subseteq (r-\epsilon, r+\epsilon)$. Com efeito, se $g \in V_{f|n}$, temos que $g|n = f|n$, e, portanto, $\phi(g) \in I_{f|n} = I_{g|n}$, e, assim, $|\phi(g) - r| < \epsilon$.

Assim, resta apenas ver que é possível definir a família $(I_s : s \in \mathrm{Seq}(\mathbb{N}))$. Recursivamente, definiremos $(I_s : s \in \mathbb{N}^n)$ por indução em n.

Para $n = 1$, considere o conjunto $\{(r_1 + n, r_1 + 1 + n) : n \in \mathbb{Z}\}$. Cada um desses intervalos tem comprimento 1, extremos racionais, r_1 não está em nenhum deles (se estivesse, teríamos que $r_1 + n < r_1 < r_1 + n + 1 \Rightarrow n < 0 < n + 1 \Rightarrow 0 < -n < 1$ para algum n, o que é absurdo pois não existe inteiro entre 0 e 1), são dois a dois disjuntos e os únicos pontos deixados fora de sua união é o conjunto de racionais $\{r_1 + n : n \in \mathbb{Z}\}$. Seja $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ bijetora e defina $I_{(n)} = (r_1 + \psi(n), r_1 + 1 + \psi(n))$, o que faz (1)-(6) valer para $n = 1$.

Suponha que $(I_s : s \in \bigcup_{k\leq n} \mathbb{N}^k)$ já foi construído de modo a satisfazer (1)-(6) até n. Definiremos $(I_s : s \in \mathbb{N}^{n+1})$.

Dado $s \in \mathbb{N}^n$, procederemos da seguinte forma:

Caso 1: r_n não é extremo esquerdo de I_s. Nesse caso, considere $(u^s_m : m \in \mathbb{Q})$ uma sequência estritamente crescente de racionais diferentes de r_n em $\mathrm{cl}\, I_s$ que converge para o extremo direito de I_s tal que u^s_0 é o extremo esquerdo de I_s, um dos pontos é o ponto médio de I_s, e, caso $r_{n+1} \in I_s$, um dos pontos seja r_{n+1}. Seja $I_{s^\frown(m)} = (u^s_m, u^s_{m+1})$.

Caso 2: r_n é extremo esquerdo de I_s. Nesse caso, considere $(u^s_m : m \in \mathbb{Q})$ uma sequência estritamente decrescente de racionais diferentes de r_n em $\mathrm{cl}\, I_s$ que converge para o extremo esquerdo de I_s tal que u^s_0 é o extremo direito de I_s, um dos pontos é o ponto médio de I_s, e, caso $r_{n+1} \in I_s$, um dos pontos seja r_{n+1}. Seja $I_{s^\frown(m)} = (u^s_{m+1}, u^s_m)$.

A ideia aqui é repartir cada intervalo já concluído em infinitos intervalos deixando de fora de cada um deles apenas números racionais. Pedimos que um dos pontos deixados de fora seja o do meio para garantir que cada novo intervalo tenha no máximo metade do comprimento do intervalo antigo e forçamos os pontos proibidos a ficarem de fora.

Assim, estão definidos I_s para todo $s \in \mathbb{N}^{n+1}$ já que todo $s \in \mathbb{N}^{n+1}$ é da forma $t^\frown(m)$ para algum $t \in \mathbb{N}^n$ e $m \in \mathbb{N}$.

(1) é satisfeito pois, fixados s e m, como em qualquer caso um dos pontos da sequência u_m é o ponto médio de I_s , temos que o comprimento de $I_{s^\frown(m)}$ é $\leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+1}$ pois o comprimento de I_s é $\leq \frac{1}{n}$.

(2) é satisfeito: fixados $s, s' \in \mathbb{N}^n$ e $m, m' \in \mathbb{N}$, se $s \neq s'$ temos que $I_s \cap I_{s'} = \emptyset$, e, portanto, $I_{s^\frown(m)} \cap I_{s'^\frown(m')} = \emptyset$ pois $I_{s^\frown(m)} \subseteq I_s$ e $I_{s^\frown(m')} \subseteq I_{s'}$. Já se $s = s'$ e $m \neq m'$, temos que, em qualquer caso, os intervalos foram escolhidos disjuntos já que a sequência tomada era estritamente monótona.

(3) é satisfeito: note que, por construção se $t \in \mathbb{N}^{n+1}$, então $I_t \subseteq I_{t|n}$. Se $1 \leq m \leq n$, temos que, por hipótese recursiva, $I_t \subseteq I_{t|n} \subseteq I_{t|m}$.

(4) é satisfeito: basta observar que

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{t \in \mathbb{N}^{n+1}} I_t = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{s \in \mathbb{N}^n} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_{s^\frown(m)} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{s \in \mathbb{N}^n} (I_s \setminus \{u^s_m : m \geq 1\}) =$$

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{s \in \mathbb{N}^n} \left(I_s \setminus \{u^t_m : m \geq 1, t \in \mathbb{N}^n\}\right) = \mathbb{R} \setminus \left(\left(\bigcup_{s \in \mathbb{N}^n} I_s \right) \setminus \{u^t_m : m \geq 1, t \in \mathbb{N}^n\} \right)$$

$$= \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{s \in \mathbb{N}^n} I_s \right) \cup \{u^t_m : m \geq 1, t \in \mathbb{N}^n\}$$

que, por construção e hipótese de recursão, está contido em $\mathbb{Q}$.

(5) é satisfeito: em (4), vimos que:

$$\mathbb{R} \setminus \bigcup_{t \in \mathbb{N}^{n+1}} I_t = \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{s \in \mathbb{N}^n} I_s \right) \cup \{u^t_m : m \geq 1, t \in \mathbb{N}^n\}.$$

Se r_{n+1} não está em nenhum I_s para algum $s \in \mathbb{N}^n$, então ele está em $\mathbb{R} \setminus \bigcup_{s \in \mathbb{N}^n} I_s$. Caso exista $s \in \mathbb{N}^n$ tal que $r_{n+1} \in I_s$, segue que $r_{n+1} = u^s_m$ para algum $m \geq 1$.

(6) é satisfeito: O conjunto dos extremos dos intervalos definidos é o conjunto $\{u^t_m : m \geq 1, t \in \mathbb{N}^n\}$. Por construção, nenhum dos elementos desse conjunto é r_n. □

4. Agradecimentos

Durante a elaboração deste trabalho o autor estava realizando Doutorado em Matemática no IME-USP sendo financiado pela FAPESP (proc. 2017/155022). O autor também agradece ao Professor Samuel Gomes da Silva (UFBA) que indicou essa demonstração deste resultado em um minicurso durante a Semana Temática de Lógica, Conjuntos e Topologia do Programa de Verão em Matemática da UFBA 2018.

Referências

[1] Set-theoretic definition of natural numbers — Wikipedia, the free encyclopedia, 2019. [Online; acessado em 8 de Janeiro, 2019].

[2] K. Hrbacek and T. Jech. *Introduction to Set Theory, Third Edition, Revised and Expanded*. Chapman & Hall/CRC Pure and Applied Mathematics. Taylor & Francis, 1999.

[3] Elon Lages Lima. *Análise Real, Vol. 1*. Coleção Matemática Universitária. IMPA, 2012.

[4] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley series in mathematics. Dover Publications, 2004.