

Usando Geometria Diferencial para classificar trajetórias de fótons na Relatividade Especial

IVO TEREK COUTO*

Department of Mathematics
The Ohio State University
terekcouth.1@osu.edu

Resumo

Neste artigo mostraremos como as curvas de tipo luz e semi-luz no espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 podem ser classificadas, a menos de movimentos rígidos do ambiente, por um único invariante \mathfrak{T} .

1. INTRODUÇÃO

NA Geometria Diferencial Clássica, um dos principais problemas estudados é o da classificação de curvas em \mathbb{R}^3 , por meio de certos invariantes geométricos. Construindo o chamado *triedro de Frenet-Serret* associado à uma curva, temos as noções de *curvatura* e *torção*, que são suficientes para reconstruir uma curva a menos de um movimento rígido do ambiente \mathbb{R}^3 , conforme o famoso *Teorema Fundamental das Curvas* (vide, por exemplo, [1]).

Já na Geometria Riemanniana (ou pseudo-Riemanniana, em geral), estudamos o que acontece quando o “mundo” onde vivemos não é mais o espaço Euclidiano \mathbb{R}^3 , mas sim algum outro ambiente. Em particular, ficam contemplados vários modelos para a geometria hiperbólica, descoberta por Bolyai e Lobachevsky em meados do século XIX, que teve a impactante consequência para a Matemática de estabelecer a independência do quinto postulado de Euclides dos demais postulados.

Em vista disto, torna-se natural imaginar como a teoria clássica de curvas pode ser desenvolvida neste panorama mais geral. Neste artigo veremos como isto pode ser feito quando o ambiente é o espaço de Lorentz-Minkowski \mathbb{L}^3 , amplamente utilizado na Relatividade Especial, sendo o modelo mais simples de um espaço-tempo livre de forças gravitacionais.

2. O ESPAÇO DE LORENTZ-MINKOWSKI

Considere uma partícula no plano \mathbb{R}^2 , se deslocando em linha reta entre dois pontos. Sendo c a velocidade da luz, naturalmente temos que o seu vetor velocidade média $(\Delta x/\Delta t, \Delta y/\Delta t)$ satisfaz

$$\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 < c^2.$$

Vê-se que tal expressão é equivalente a $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 - c^2(\Delta t)^2 < 0$. Trabalhando com unidades geométricas onde $c = 1$, vemos que o lado esquerdo desta desigualdade motiva a seguinte definição:

*Este trabalho obteve apoio parcial da FAPESP (processo 2014/09781-8) e do CNPq (processo 134593/2016-2).

Definição 2.1 (\mathbb{L}^3). O *espaço de Lorentz-Minkowski* (de dimensão 3) é o par $\mathbb{L}^3 \doteq (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle_L)$, onde o produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ é definido por $\langle v_1, v_2 \rangle_L \doteq x_1x_2 + y_1y_2 - z_1z_2$, quaisquer que sejam os vetores $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ em \mathbb{R}^3 .

Definição 2.2 (Caráter causal). Um vetor $v \in \mathbb{L}^3$ é dito de

- (i) tipo *espaço* se $\langle v, v \rangle_L > 0$ ou se $v = \mathbf{0}$;
- (ii) tipo *tempo* se $\langle v, v \rangle_L < 0$;
- (iii) tipo *luz* se $\langle v, v \rangle_L = 0$, mas $v \neq \mathbf{0}$.

A interpretação para o caráter causal de um vetor está praticamente dada acima. Mais explicitamente, se são dados *eventos* $p, q \in \mathbb{L}^3$, e colocamos $v \doteq q - p$, então:

- se v é de tipo tempo, um dos eventos pode ter sido influenciado pelo outro, digamos, por meio da propagação de uma onda material;
- se v é de tipo luz, um dos eventos pode ter sido influenciado pelo outro, porém apenas por meio da propagação de uma onda eletromagnética ou da emissão de sinal luminoso (com efeito, o deslocamento em linha reta entre as projeções dos eventos em $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ocorre na velocidade da luz);
- se v é de tipo espaço, não existe relação de influência entre os eventos dados.

Pensando que $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ é a equação de um cone, temos a seguinte caracterização geométrica dos tipos causais de vetores em \mathbb{L}^3 :

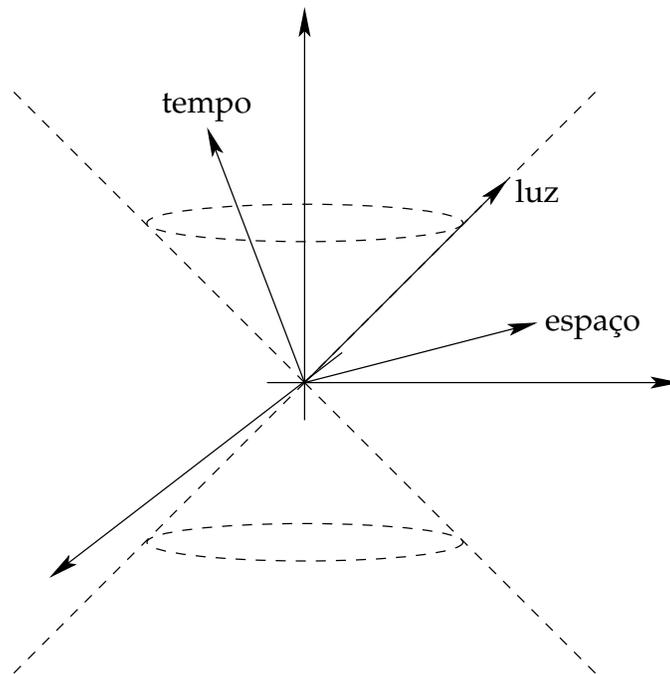


Figura 1: Interpretando geometricamente os tipos causais de vetores em \mathbb{L}^3 .

Esta figura ilustra que de fato o eixo z faz o papel do eixo do tempo. Aproveitando para introduzir um pouco mais de nomenclatura, diremos que um vetor $v \in \mathbb{L}^3$ de tipo tempo ou luz é

futuro-dirigido (resp. *passado-dirigido*) se possui componente temporal positiva (resp. negativa). E, também, que dois vetores $v, w \in \mathbb{L}^3$ são *Lorentz-ortogonais* se $\langle v, w \rangle_L = 0$.

3. UM POUCO DE ÁLGEBRA LINEAR

Visto que o produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ não é mais positivo-definido, a teoria de produtos internos que aprendemos nos cursos de Álgebra Linear da graduação não se aplica diretamente. Algumas das principais diferenças referem-se à seguinte noção de caráter causal, agora para subespaços:

Definição 3.1. Seja $W \subseteq \mathbb{L}^3$ um subespaço vetorial. Diremos que W é de

- (i) tipo *espaço* se W contém apenas vetores de tipo espaço;
- (ii) tipo *tempo* se W contém algum vetor de tipo tempo;
- (iii) tipo *luz* se W contém algum vetor de tipo luz, mas nenhum vetor de tipo tempo.

Em particular, se $\dim W = 1$ e W é de tipo luz, diremos que W é um *raio de luz*.

Pode-se mostrar que todo subespaço de \mathbb{L}^3 é necessariamente de um dos três tipos causais definidos acima. Geometricamente, o tipo causal de um plano nos diz como este intercepta o chamado *cone de luz* de \mathbb{L}^3 :

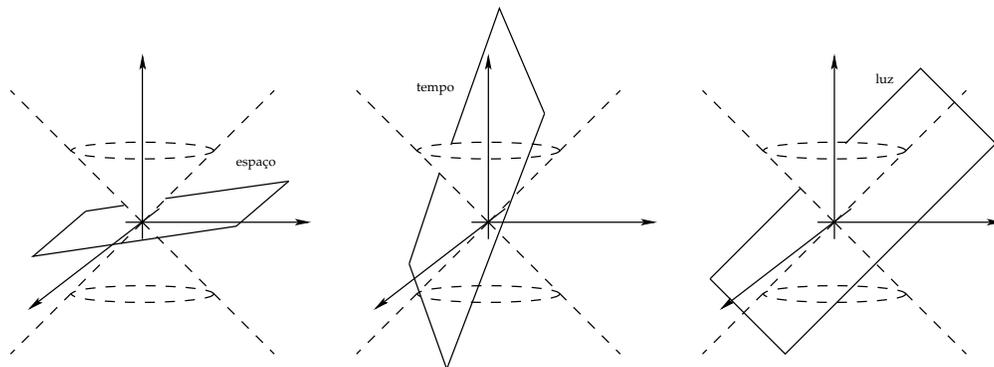


Figura 2: Interpretando geometricamente os tipos causais de planos em \mathbb{L}^3 .

Enunciamos o seguinte resultado, cuja demonstração formal fica a cargo do leitor:

Proposição 3.2. Sejam $W \subseteq \mathbb{L}^3$ um subespaço vetorial, e W^\perp o subespaço Lorentz-ortogonal a W . Então $\dim W + \dim W^\perp = 3$. Além disto, W é de tipo espaço (resp. tempo, luz) se e somente se W^\perp é de tipo tempo (resp. espaço, luz).

Observação. Evitamos o termo “complemento” ortogonal neste contexto pois não necessariamente temos $W \oplus W^\perp = \mathbb{L}^3$. Por exemplo, se W é um plano de tipo luz, então W^\perp é um raio de luz contido em W (a saber, a interseção de W com o cone de luz).

E a título de ilustração, temos o seguinte e bizarro resultado:

Proposição 3.3. Sejam $v, w \in \mathbb{L}^3$ vetores de tipo luz. Então v e w são Lorentz-ortogonais se e somente se são paralelos.

Demonstração: A recíproca é evidente. Para a implicação direta, fixe um vetor de tipo tempo unitário $\mathbf{t} \in \mathbb{L}^3$, e escreva $\mathbb{L}^3 = \mathbf{t}^\perp \oplus \mathbb{R}\mathbf{t}$ (note que \mathbf{t}^\perp é um plano de tipo espaço). Escreva $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + a\mathbf{t}$ e $\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + b\mathbf{t}$ de acordo com a decomposição dada, para certos $a, b \in \mathbb{R}$ (que forçosamente são não-nulos). Um cálculo direto nos dá que $\langle b\mathbf{v}_0 - a\mathbf{w}_0, b\mathbf{v}_0 - a\mathbf{w}_0 \rangle_L = 0$. Sendo $b\mathbf{v}_0 - a\mathbf{w}_0 \in \mathbf{t}^\perp$, concluímos que $b\mathbf{v}_0 - a\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$. Segue disto que $b\mathbf{v} - a\mathbf{w} = \mathbf{0}$, como queríamos. \square

O próximo passo é formalizar a definição de isometria em \mathbb{L}^3 :

Definição 3.4.

(i) Uma aplicação linear $\Lambda: \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{L}^3$ é chamada uma *transformação de Lorentz* se

$$\langle \Lambda \mathbf{v}, \Lambda \mathbf{w} \rangle_L = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_L,$$

quaisquer que sejam $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{L}^3$.

(ii) Uma aplicação $F: \mathbb{L}^3 \rightarrow \mathbb{L}^3$ é chamada uma *transformação de Poincaré* se

$$\langle F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{w}), F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{w}) \rangle_L = \langle \mathbf{v} - \mathbf{w}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle_L,$$

quaisquer que sejam $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{L}^3$.

Pode-se mostrar que as transformações de Lorentz formam um grupo, denominado $O_1(3, \mathbb{R})$, o *grupo de Lorentz*. Analogamente, as transformações de Poincaré formam o chamado *grupo de Poincaré* $P(3, \mathbb{R})$. Como no caso Euclideano, acaba sendo verdade que toda transformação de Poincaré é a composição de uma transformação de Lorentz com uma translação. Mas o resultado principal que precisaremos, cuja demonstração também é a mesma dada no caso clássico, é a:

Proposição 3.5. *Sejam $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{L}^3$, e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)$ bases de \mathbb{L}^3 tais que $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle_L = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle_L$ para $1 \leq i, j \leq 3$. Então existe uma única $F \in P(3, \mathbb{R})$ com $F(\mathbf{p}) = \mathbf{q}$ e $DF(\mathbf{p})(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$ para $1 \leq i \leq 3$, onde $DF(\mathbf{p})$ é a derivada total de F em \mathbf{p} .*

Por fim, para fechar o pacote de Álgebra Linear, vejamos como definir um novo produto vetorial \times_L associado ao produto $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$, e suas propriedades:

Definição 3.6. Sejam $\mathbf{v} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\mathbf{w} = (x_2, y_2, z_2)$ em \mathbb{L}^3 , e $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ a base canônica de \mathbb{L}^3 . O *produto vetorial Lorentziano* entre \mathbf{v} e \mathbf{w} é definido por

$$\mathbf{v} \times_L \mathbf{w} \doteq \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & -\mathbf{e}_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_2 y_1 - x_1 y_2).$$

Nas próximas seções, eventualmente utilizaremos os produtos de \mathbb{R}^3 simultaneamente com os de \mathbb{L}^3 . O produto interno usual de \mathbb{R}^3 será denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$, e o produto vetorial associado por \times_E .

Lema 3.7. *O produto \times_L é bilinear, anti-simétrico, e satisfaz:*

- (a) $\mathbf{v} \times_L \mathbf{w} = \mathbf{0}$ se e somente se \mathbf{v} e \mathbf{w} são paralelos;
- (b) $\mathbf{v} \times_L \mathbf{v}$ é de tipo espaço (resp. tempo, luz) se e somente se o plano gerado por \mathbf{v} e \mathbf{w} é de tipo tempo (resp. espaço, luz);
- (c) $\langle \mathbf{u} \times_L \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle_L = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \times_L \mathbf{w} \rangle_L$, quaisquer que sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{L}^3$;
- (d) $\text{Id}_{2,1}(\mathbf{v} \times_L \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times_E \mathbf{w}$, onde $\text{Id}_{2,1} = \text{diag}(1, 1, -1)$ denota a reflexão relativa ao plano $z = 0$.

A demonstração deste lema consiste apenas em fazer contas com a definição de \times_L , e o item (b) segue da Proposição 3.2. Mais detalhes sobre esta seção poderão ser encontrados no Capítulo 1 de [3].

4. CURVAS ADMISSÍVEIS

Agora, começamos com um pouco de Geometria Diferencial propriamente dita. Fixe, de uma vez por todas, um intervalo aberto da reta $I \subseteq \mathbb{R}$. Todas as curvas aqui serão supostas suaves, como de praxe. Iniciamos a discussão sobre curvas definindo novamente a noção de caráter causal:

Definição 4.1. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva parametrizada. Diremos que α é de

- (i) tipo *espaço*, se o vetor $\alpha'(t)$ é de tipo espaço, para todo $t \in I$;
- (ii) tipo *tempo*, se o vetor $\alpha'(t)$ é de tipo tempo, para todo $t \in I$;
- (iii) tipo *luz*, se o vetor $\alpha'(t)$ é de tipo luz, para todo $t \in I$;

A interpretação para o tipo causal de curvas é essencialmente a dada no início deste artigo: curvas de tipo tempo representam linhas de universo de partículas com massa positiva e curvas de tipo luz representam trajetórias de fótons e partículas sem massa, enquanto que curvas de tipo espaço não possuem um significado físico.

A teoria usual de curvas em \mathbb{R}^3 é adaptada sem dificuldades no espaço \mathbb{L}^3 para a seguinte classe de curvas:

Definição 4.2. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva parametrizada. Diremos que α é *admissível* se:

- (i) α é *bi-regular*, ou seja, $\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ é linearmente independente para todo $t \in I$.
- (ii) ambos $\alpha'(t)$ e $\text{span}\{\alpha'(t), \alpha''(t)\}$ não são de tipo luz, qualquer que seja $t \in I$.

Para tais curvas, existe um parâmetro natural (o comprimento de arco), e definem-se um *Triedro de Frenet-Serret* $(\mathbf{T}_\alpha(t), \mathbf{N}_\alpha(t), \mathbf{B}_\alpha(t))$ em cada ponto $\alpha(t)$, uma curvatura κ_α e uma torção τ_α , como na teoria usual desenvolvida em \mathbb{R}^3 . E daí recuperamos o:

Teorema 4.3 (Teorema Fundamental para Curvas Admissíveis). *Sejam $\kappa, \tau: I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, com κ positiva, $p_0 \in \mathbb{L}^3$, $s_0 \in I$ e $(\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0)$ uma base ortonormal positiva de \mathbb{L}^3 . Então existe uma única curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ admissível e com velocidade unitária tal que*

- $\alpha(s_0) = p_0$;
- $(\mathbf{T}_\alpha(s_0), \mathbf{N}_\alpha(s_0), \mathbf{B}_\alpha(s_0)) = (\mathbf{T}_0, \mathbf{N}_0, \mathbf{B}_0)$;
- $\kappa_\alpha(s) = \kappa(s)$ e $\tau_\alpha(s) = \tau(s)$, para todo $s \in I$.

Detalhes da construção do Triedro de Frenet-Serret para curvas admissíveis e uma demonstração deste resultado encontram-se no Capítulo 2 de [3].

5. REFERENCIAIS DE CARTAN E O TEOREMA FUNDAMENTAL (DE NOVO)

Nesta seção final, temos como objetivo estabelecer uma versão do Teorema 4.3 acima para curvas não-admissíveis. Notemos que os ingredientes essenciais foram:

- A existência de uma parametrização natural (por comprimento de arco);
- Um certo referencial adaptado à curva (o triedro de Frenet-Serret);
- Dois invariantes geométricos (curvatura e torção).

Então, apesar de alguns detalhes técnicos que estão por vir, nosso foco deve ser claro: buscamos uma parametrização “natural” para curvas de tipo luz, um novo referencial adaptado (o que chamaremos *Referencial de Cartan*), e um invariante geométrico (a *pseudo-torção*).

Dado $v \in \mathbb{L}^3$, ponha $\|v\|_L \doteq \sqrt{|\langle v, v \rangle_L|}$. Começamos com a:

Proposição 5.1 (Arco-fóton). *Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva parametrizada de tipo luz tal que $\|\alpha''(t)\|_L \neq 0$ para todo $t \in I$. Então α admite uma reparametrização por arco-fóton, ou seja, existem um intervalo aberto $J \subseteq \mathbb{R}$ e um difeomorfismo $h: J \rightarrow I$ tal que $\tilde{\alpha} \doteq \alpha \circ h$ satisfaz $\|\tilde{\alpha}''(\phi)\|_L = 1$ para todo $\phi \in J$.*

Demonstração: Uma tal função h deve satisfazer $\tilde{\alpha}'(\phi) = \alpha'(h(\phi))h'(\phi)$, para todo ϕ em algum intervalo aberto, de modo que podemos derivar tal expressão duas vezes, obtendo

$$\tilde{\alpha}''(\phi) = \alpha''(h(\phi))h'(\phi)^2 + \alpha'(h(\phi))h''(\phi).$$

Como α é de tipo luz, temos que $\alpha''(h(\phi))$ e $\alpha'(h(\phi))$ são sempre ortogonais. Ainda, a condição $\|\alpha''(h(\phi))\|_L \neq 0$ nos diz que $\alpha''(h(\phi))$ é sempre de tipo espaço. Assim, aplicando $\langle \cdot, \cdot \rangle_L$ na equação acima, obtemos

$$1 = \langle \alpha''(h(\phi)), \alpha''(h(\phi)) \rangle_L h'(\phi)^4,$$

e portanto $h'(\phi) = \|\alpha''(h(\phi))\|_L^{-1/2}$. Esta é uma equação diferencial de primeira ordem que depende continuamente de h , de modo que fixados $\phi_0 \in J$ e $t_0 \in I$, existe uma única solução satisfazendo $h(\phi_0) = t_0$. Garantida a existência de h , podemos utilizá-la para definir $\tilde{\alpha}$ com as propriedades desejadas. \square

Observação. Do mesmo modo que ocorre para parâmetros comprimento de arco, mostra-se que se ϕ_1 e ϕ_2 são parâmetros de arco-fóton para uma dada curva de tipo luz α , então vale que $\phi_1(t) = \pm\phi_2(t) + a$ para algum $a \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.2. Considere a hélice $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por $\alpha(t) \doteq (r \cos t, r \sin t, rt)$, onde $r > 0$. Claramente o vetor $\alpha'(t) = (-r \sin t, r \cos t, r)$ é de tipo luz para todo $t \in \mathbb{R}$, de modo que α é uma curva de tipo luz. Ainda, $\alpha''(t) = (-r \cos t, -r \sin t, 0)$ satisfaz $\|\alpha''(t)\|_L = r$, e assim é possível encontrar um parâmetro arco-fóton para α . Basta então resolver a simples equação diferencial $h'(\phi) = 1/\sqrt{r}$. Assim, $\tilde{\alpha}$ definida por

$$\tilde{\alpha}(\phi) \doteq \left(r \cos \left(\frac{\phi}{\sqrt{r}} \right), r \sin \left(\frac{\phi}{\sqrt{r}} \right), \sqrt{r}\phi \right)$$

é uma reparametrização de α por arco-fóton.

Observação. Em vista da Proposição 5.1 acima, suporemos também daqui em diante, que:

- (a) todas as curvas tratadas são bi-regulares (em particular, estamos excluindo o caso em que α é um raio de luz);
- (b) todas as curvas estão parametrizadas com velocidade unitária ou por arco-fóton.

Definição 5.3. Uma curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ com velocidade unitária é dita de tipo *semi-luz* se o plano osculador $\text{span} \{ \alpha'(s), \alpha''(s) \}$ de α é degenerado¹ (e, portanto, $\alpha''(s)$ é de tipo luz) para todo $s \in I$.

Para organizar a discussão, não escreveremos os parâmetros s ou ϕ explicitamente, a fim de tratar os casos luz e semi-luz simultaneamente. A fim de continuar com a análise destas curvas, precisamos de um referencial conveniente, análogo ao triedro de Frenet-Serret citado anteriormente:

¹Ou seja, de tipo luz.

Definição 5.4. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva de tipo luz ou semi-luz. Definimos os vetores *tangente* e *normal* à α por

$$\mathbf{T}_\alpha \doteq \alpha' \quad \text{e} \quad \mathbf{N}_\alpha \doteq \alpha'',$$

respectivamente. Denotamos também por $\epsilon_\alpha, \eta_\alpha \in \{0, 1\}$ o indicador e o co-indicador de α , conforme os tipos causais de \mathbf{T}_α e \mathbf{N}_α , respectivamente.

Sendo mais preciso, uma curva de tipo luz satisfaz $(\epsilon_\alpha, \eta_\alpha) = (0, 1)$, enquanto uma curva de tipo semi-luz satisfaz $(\epsilon_\alpha, \eta_\alpha) = (1, 0)$. Buscamos um terceiro vetor \mathbf{B}_α , de tipo luz, tal que a base $(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha)$ de \mathbb{L}^3 seja pelo menos positiva. Como esperado, chamaremos \mathbf{B}_α de *vetor binormal* à α . Para encontrá-lo, precisamos do conceito de orientabilidade para planos de tipo luz.

Em geral, podemos definir a orientação de uma base (v, w) de um plano degenerado em termos de uma escolha de um vetor n euclideanamente normal ao plano. Mais precisamente, diremos que (v, w) é *positiva* se (v, w, n) é uma base positiva de \mathbb{L}^3 , para n futuro-dirigido. Se v é de tipo luz e w é unitário, temos que $v \times_L w$ é de tipo luz e paralelo à v . Escrevendo $v \times_L w = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, analisamos o sinal de λ como se segue:

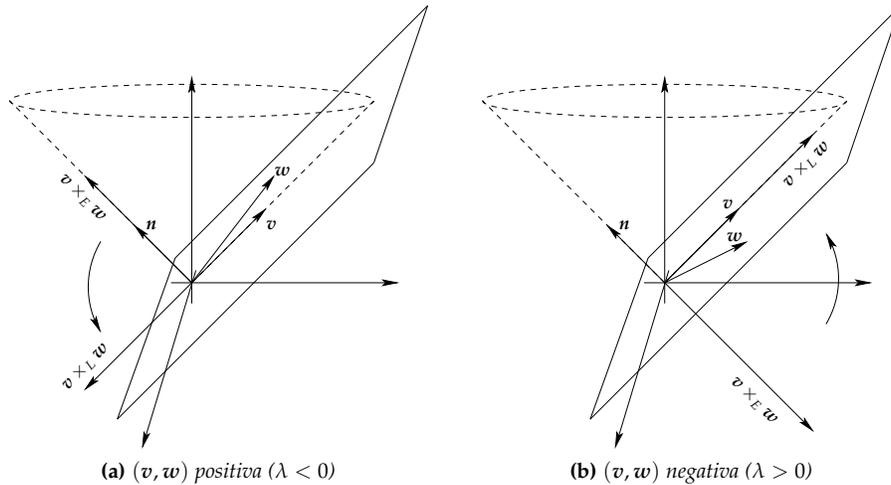


Figura 3: Orientações de um plano degenerado.

Deste modo, se (v, w) é positiva então $\lambda < 0$ e, analogamente, se (v, w) é negativa temos $\lambda > 0$.

Voltando à construção da base $(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha)$: podemos supor, a menos de uma reparametrização, que a base $(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha)$ é positiva. Nesse caso, para determinar o vetor \mathbf{B}_α , que será de tipo luz, precisamos saber também os valores de $\langle \mathbf{T}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L$ e $\langle \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L$. Em vista da discussão acima, um destes valores deve ser 0 (para ser ortogonal ao vetor de tipo espaço) e o outro -1 (para ser linearmente independente com o vetor de tipo luz). Qual será zero e qual será -1 naturalmente dependerá do tipo causal da curva α . Escolhendo \mathbf{B}_α tal que $\langle \mathbf{T}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L = -\eta_\alpha$ e $\langle \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L = -\epsilon_\alpha$ tratamos ambos os casos simultaneamente, e daí temos a:

Proposição 5.5. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva de tipo luz ou semi-luz. A tripla $(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha)$ é uma base positiva de \mathbb{L}^3 .

Demonstração: Devemos mostrar que $\det(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha) > 0$. Faremos aqui apenas o caso $\epsilon_\alpha = 0$ e $\eta_\alpha = 1$, sendo o outro análogo.

Escrevendo $\mathbf{B}_\alpha(\phi)$ na base $(\mathbf{T}_\alpha(\phi), \mathbf{N}_\alpha(\phi), \mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi))$, vemos que a única componente de $\mathbf{B}_\alpha(\phi)$ relevante para o determinante pedido é a na direção de $\mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi)$, digamos que seja $\mu(\phi)\mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi)$. Daí temos

$$\det(\mathbf{T}_\alpha(\phi), \mathbf{N}_\alpha(\phi), \mathbf{B}_\alpha(\phi)) = \mu(\phi) \underbrace{\det(\mathbf{T}_\alpha(\phi), \mathbf{N}_\alpha(\phi), \mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi))}_{>0},$$

de modo que só nos resta verificar que $\mu(\phi) > 0$. A discussão ilustrada pela Figura 3 nos diz que $\mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_L \mathbf{N}_\alpha(\phi) = \lambda(\phi)\mathbf{T}_\alpha(\phi)$ para um certo $\lambda(\phi) < 0$ (pois a base $(\mathbf{T}_\alpha(\phi), \mathbf{N}_\alpha(\phi))$ é positiva). Aplicando $\text{Id}_{2,1}$ nesta igualdade segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi) &= \text{Id}_{2,1}(\mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_L \mathbf{N}_\alpha(\phi)) = \lambda \text{Id}_{2,1}\mathbf{T}_\alpha(\phi) \implies \\ &\implies \langle \mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi), \text{Id}_{2,1}\mathbf{T}_\alpha(\phi) \rangle_E < 0. \end{aligned}$$

Finalmente, como $\mathbf{T}_\alpha(\phi)$ e $\mathbf{N}_\alpha(\phi)$ são Lorentz-ortogonais a $\mathbf{T}_\alpha(\phi)$, vale que

$$-1 = \langle \mathbf{B}_\alpha(\phi), \mathbf{T}_\alpha(\phi) \rangle_L = \mu(\phi) \langle \mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi), \text{Id}_{2,1}\mathbf{T}_\alpha(\phi) \rangle_E,$$

e concluímos que $\mu(\phi) > 0$. □

Assim, o referencial $(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha, \mathbf{B}_\alpha)$ é chamado *referencial de Cartan* da curva α .

Geometricamente, quando a curva é de tipo luz, a situação é a seguinte: o vetor $\mathbf{N}_\alpha(\phi)$ é de tipo espaço, e portanto seu complemento ortogonal é um plano de tipo tempo que corta o cone de luz em dois raios de luz, um deles na direção de $\mathbf{T}_\alpha(\phi)$. Assim, o vetor binormal está na direção do outro raio de luz em $\mathbf{N}_\alpha(\phi)^\perp$, sendo determinado pela equação $\langle \mathbf{B}_\alpha(\phi), \mathbf{T}_\alpha(\phi) \rangle_L = -1$. Uma interpretação análoga vale quando a curva é de tipo semi-luz.

Naturalmente, estamos interessados em saber como um dado vetor se escreve em termos do referencial de Cartan, de forma análoga à expansão ortonormal utilizada com produtos positivo-definidos:

Lema 5.6. *Sejam $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ e $v \in \mathbb{L}^3$. Então:*

(i) *se α é de tipo luz, temos*

$$v = -\langle v, \mathbf{B}_\alpha(\phi) \rangle_L \mathbf{T}_\alpha(\phi) + \langle v, \mathbf{N}_\alpha(\phi) \rangle_L \mathbf{N}_\alpha(\phi) - \langle v, \mathbf{T}_\alpha(\phi) \rangle_L \mathbf{B}_\alpha(\phi),$$

para todo $\phi \in I$;

(ii) *se α é de tipo semi-luz, temos*

$$v = \langle v, \mathbf{T}_\alpha(s) \rangle_L \mathbf{T}_\alpha(s) - \langle v, \mathbf{B}_\alpha(s) \rangle_L \mathbf{N}_\alpha(s) - \langle v, \mathbf{N}_\alpha(s) \rangle_L \mathbf{B}_\alpha(s),$$

para todo $s \in I$.

Demonstração: Trataremos ambos os casos de uma vez, notando que $\epsilon_\alpha^n = \epsilon_\alpha$, $\eta_\alpha^n = \eta_\alpha$ para todo $n \geq 1$, $\epsilon_\alpha \eta_\alpha = 0$ e $\epsilon_\alpha + \eta_\alpha = 1$, sempre. Estas observações seguem do fato de que as únicas possibilidades são $(\epsilon_\alpha, \eta_\alpha) = (1, 0)$ e $(\epsilon_\alpha, \eta_\alpha) = (0, 1)$. Recorde que ainda estamos supondo $(\mathbf{T}_\alpha, \mathbf{N}_\alpha)$ positiva.

Dito isto, escreva $v = a\mathbf{T}_\alpha + b\mathbf{N}_\alpha + c\mathbf{B}_\alpha$. Aplicando todos os produtos possíveis nos dois lados desta igualdade, e já organizando as expressões obtidas em forma de matriz, temos

$$\begin{pmatrix} \langle v, \mathbf{T}_\alpha \rangle_L \\ \langle v, \mathbf{N}_\alpha \rangle_L \\ \langle v, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha & 0 & -\eta_\alpha \\ 0 & \eta_\alpha & -\epsilon_\alpha \\ -\eta_\alpha & -\epsilon_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Segue das observações feitas logo acima que a inversa desta matriz de coeficientes existe, e é a própria, de modo que

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha & 0 & -\eta_\alpha \\ 0 & \eta_\alpha & -\epsilon_\alpha \\ -\eta_\alpha & -\epsilon_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{v}, \mathbf{T}_\alpha \rangle_L \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{N}_\alpha \rangle_L \\ \langle \mathbf{v}, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L \end{pmatrix}.$$

Particularizando, concluímos o lema. \square

Antes de aplicar o Lema 5.6 acima para as derivadas dos vetores no referencial de Cartan, temos a:

Definição 5.7. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva de tipo luz ou semi-luz. A *pseudo-torção* de α é dada por $\overline{\tau}_\alpha \doteq -\langle \mathbf{N}'_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L$.

Teorema 5.8. Seja $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva de tipo luz ou semi-luz. Então vale que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T}'_\alpha \\ \mathbf{N}'_\alpha \\ \mathbf{B}'_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \eta_\alpha \overline{\tau}_\alpha & \epsilon_\alpha \overline{\tau}_\alpha & \eta_\alpha \\ \epsilon_\alpha & \eta_\alpha \overline{\tau}_\alpha & -\epsilon_\alpha \overline{\tau}_\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{T}_\alpha \\ \mathbf{N}_\alpha \\ \mathbf{B}_\alpha \end{pmatrix}.$$

Observação. Explicitamente, as matrizes de coeficientes quando α é de tipo luz ou semi-luz são, respectivamente,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \overline{\tau}_\alpha(\phi) & 0 & 1 \\ 0 & \overline{\tau}_\alpha(\phi) & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & \overline{\tau}_\alpha(s) & 0 \\ 1 & 0 & -\overline{\tau}_\alpha(s) \end{pmatrix}.$$

Demonstração: A primeira equação é a definição do vetor normal. Para a segunda equação, aplicando o Lema 5.6 interpretando \mathbf{N}'_α como um vetor coluna, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}'_\alpha &= \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha & 0 & -\eta_\alpha \\ 0 & \eta_\alpha & -\epsilon_\alpha \\ -\eta_\alpha & -\epsilon_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{N}'_\alpha, \mathbf{T}_\alpha \rangle_L \\ \langle \mathbf{N}'_\alpha, \mathbf{N}_\alpha \rangle_L \\ \langle \mathbf{N}'_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha & 0 & -\eta_\alpha \\ 0 & \eta_\alpha & -\epsilon_\alpha \\ -\eta_\alpha & -\epsilon_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\eta_\alpha \\ 0 \\ -\overline{\tau}_\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_\alpha \overline{\tau}_\alpha \\ \epsilon_\alpha \overline{\tau}_\alpha \\ \eta_\alpha \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e assim obtemos a segunda linha da matriz dos coeficientes do enunciado. Analogamente para \mathbf{B}'_α , temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'_\alpha &= \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha & 0 & -\eta_\alpha \\ 0 & \eta_\alpha & -\epsilon_\alpha \\ -\eta_\alpha & -\epsilon_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle \mathbf{B}'_\alpha, \mathbf{T}_\alpha \rangle_L \\ \langle \mathbf{B}'_\alpha, \mathbf{N}_\alpha \rangle_L \\ \langle \mathbf{B}'_\alpha, \mathbf{B}_\alpha \rangle_L \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha & 0 & -\eta_\alpha \\ 0 & \eta_\alpha & -\epsilon_\alpha \\ -\eta_\alpha & -\epsilon_\alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha \\ \overline{\tau}_\alpha \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha \\ \eta_\alpha \overline{\tau}_\alpha \\ -\epsilon_\alpha \overline{\tau}_\alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e obtemos a última linha. \square

Exemplo 5.9. Seja $r > 0$ e considere a curva $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por

$$\alpha(\phi) = \left(r \cos\left(\frac{\phi}{\sqrt{r}}\right), r \sin\left(\frac{\phi}{\sqrt{r}}\right), \sqrt{r}\phi \right).$$

Vimos no Exemplo 5.2 (p. 6) que α é de tipo luz e parametrizada por arco-fóton. Temos

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_\alpha(\phi) &= \alpha'(\phi) = \left(-\sqrt{r} \operatorname{sen} \left(\frac{\phi}{\sqrt{r}} \right), \sqrt{r} \cos \left(\frac{\phi}{\sqrt{r}} \right), \sqrt{r} \right) \text{ e} \\ \mathbf{N}_\alpha(\phi) &= \alpha''(\phi) = \left(-\cos \left(\frac{\phi}{\sqrt{r}} \right), -\operatorname{sen} \left(\frac{\phi}{\sqrt{r}} \right), 0 \right).\end{aligned}$$

Para calcular $\mathbf{B}_\alpha(\phi)$, note que o produto vetorial Euclideano

$$\mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi) = \left(\sqrt{r} \operatorname{sen} \left(\frac{\phi}{\sqrt{r}} \right), -\sqrt{r} \cos \left(\frac{\phi}{\sqrt{r}} \right), \sqrt{r} \right)$$

visto em \mathbb{L}^3 é de tipo luz e futuro-dirigido, de modo que a base $(\mathbf{T}_\alpha(\phi), \mathbf{N}_\alpha(\phi))$ é sempre positiva e não é necessário reparametrizar α . Além disso, neste caso temos uma particularidade: $\mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi)$ é também Lorentz-ortogonal a $\mathbf{N}_\alpha(\phi)$. Isso nos diz que $\mathbf{B}_\alpha(\phi)$ deve ser um múltiplo positivo de $\mathbf{T}_\alpha(\phi) \times_E \mathbf{N}_\alpha(\phi)$. Para que tenhamos $\langle \mathbf{B}_\alpha(\phi), \mathbf{T}_\alpha(\phi) \rangle_L = -1$, basta tomar

$$\mathbf{B}_\alpha(\phi) = \left(\frac{1}{2\sqrt{r}} \operatorname{sen} \left(\frac{\phi}{\sqrt{r}} \right), -\frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \left(\frac{\phi}{\sqrt{r}} \right), \frac{1}{2\sqrt{r}} \right).$$

E finalmente temos:

$$\overline{\tau}_\alpha(\phi) = -\langle \mathbf{N}'_\alpha(\phi), \mathbf{B}_\alpha(\phi) \rangle_L = -\frac{1}{2r} \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\phi}{\sqrt{r}} \right) - \frac{1}{2r} \cos^2 \left(\frac{\phi}{\sqrt{r}} \right) + 0 = -\frac{1}{2r}.$$

Os dois próximos resultados ilustram algumas das diferenças entre $\overline{\tau}_\alpha$ e τ_α .

Teorema 5.10. *As únicas curvas de tipo luz planas em \mathbb{L}^3 são raios de luz.*

Demonstração: É claro que raios de luz são curvas planas e que se α não é um raio de luz, então admite uma reparametrização por arco-fóton (por continuidade, pelo menos perto do instante onde o vetor “aceleração” não se anula, onde o argumento a seguir se aplica). Assim, é suficiente ver que se $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ é uma curva de tipo luz parametrizada por arco-fóton e $\langle \alpha(\phi) - p, v \rangle_L = 0$ para todo $\phi \in I$, para certos $p, v \in \mathbb{L}^3$, então $v = \mathbf{0}$. De fato, derivando a expressão dada três vezes obtemos

$$\langle \mathbf{T}_\alpha(\phi), v \rangle_L = \langle \mathbf{N}_\alpha(\phi), v \rangle_L = \overline{\tau}_\alpha(\phi) \langle \mathbf{T}_\alpha(\phi), v \rangle_L + \langle \mathbf{B}_\alpha(\phi), v \rangle_L = 0.$$

Pelo Lema 5.6 (p. 8) segue que $v = \mathbf{0}$. □

Exemplo 5.11. Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com derivada segunda estritamente positiva e considere $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ dada por

$$\alpha(s) = (s, f(s), f(s)).$$

Vê-se que α é de tipo semi-luz com

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_\alpha(s) &= \alpha'(s) = (1, f'(s), f'(s)) \text{ e} \\ \mathbf{N}_\alpha(s) &= \alpha''(s) = (0, f''(s), f''(s)).\end{aligned}$$

Temos que

$$\mathbf{T}_\alpha(s) \times_E \mathbf{N}_\alpha(s) = (0, -f''(s), f''(s))$$

é de tipo luz e futuro-dirigido, de modo que $(\mathbf{T}_\alpha(s), \mathbf{N}_\alpha(s))$ é positiva.

Buscamos $\mathbf{B}_\alpha(s) = (a(s), b(s), c(s))$ de tipo luz, ortogonal a $\mathbf{T}_\alpha(s)$ e tal que $\langle \mathbf{B}_\alpha(s), \mathbf{N}_\alpha(s) \rangle_L = -1$. Explicitamente, temos:

$$\begin{cases} a(s)^2 + b(s)^2 - c(s)^2 & = 0 \\ a(s) + f'(s)(b(s) - c(s)) & = 0 \\ f''(s)(b(s) - c(s)) & = -1 \end{cases}$$

Substituindo a terceira equação na segunda segue que $a(s) = f'(s)/f''(s)$. Com isto, a primeira equação se torna

$$(b(s) - c(s))(b(s) + c(s)) = b(s)^2 - c(s)^2 = -\frac{f'(s)^2}{f''(s)^2} \implies b(s) + c(s) = \frac{f'(s)^2}{f''(s)},$$

após usar a terceira equação novamente. Obtemos então

$$\mathbf{B}_\alpha(s) = \frac{1}{2f''(s)} \left(2f'(s), f'(s)^2 - 1, f'(s)^2 + 1 \right).$$

Finalmente, temos que

$$\bar{\tau}_\alpha(s) = -\langle \mathbf{N}'_\alpha(s), \mathbf{B}_\alpha(s) \rangle_L = \frac{f'''(s)}{f''(s)}.$$

Em particular, veja que α está contida no plano de tipo luz $\Pi: y - z = 0$, mas pode-se tomar funções f para as quais sua pseudo-torção seja não-nula.

O Exemplo 5.11 acima já nos diz que em geral, a pseudo-torção de uma curva de tipo semi-luz não é uma medida do quanto a curva deixa de ser plana. Vejamos então como a pseudo-torção controla o comportamento local da curva. Para curvas admissíveis, o sinal da torção influencia como a curva cruza o seu plano osculador (veja [3]), mas isto não vale para curvas de tipo luz ou semi-luz, considerando-se a pseudo-torção. De fato, sendo $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ de tipo luz e assumindo que $0 \in I$ e $\alpha(0) = \mathbf{0}$, temos a fórmula de Taylor

$$\alpha(\phi) = \phi\alpha'(0) + \frac{\phi^2}{2}\alpha''(0) + \frac{\phi^3}{6}\alpha'''(0) + \mathbf{R}(\phi),$$

onde $\mathbf{R}(\phi)/\phi^3 \rightarrow \mathbf{0}$ quando $\phi \rightarrow 0$. Reorganizando, para $\mathcal{F} \doteq (\mathbf{T}_\alpha(0), \mathbf{N}_\alpha(0), \mathbf{B}_\alpha(0))$ temos

$$\alpha(\phi) - \mathbf{R}(\phi) = \left(\phi + \bar{\tau}_\alpha(0)\frac{\phi^3}{6}, \frac{\phi^2}{2}, \frac{\phi^3}{6} \right)_{\mathcal{F}}.$$

Projetando, independente do sinal de $\bar{\tau}_\alpha(0)$, temos:

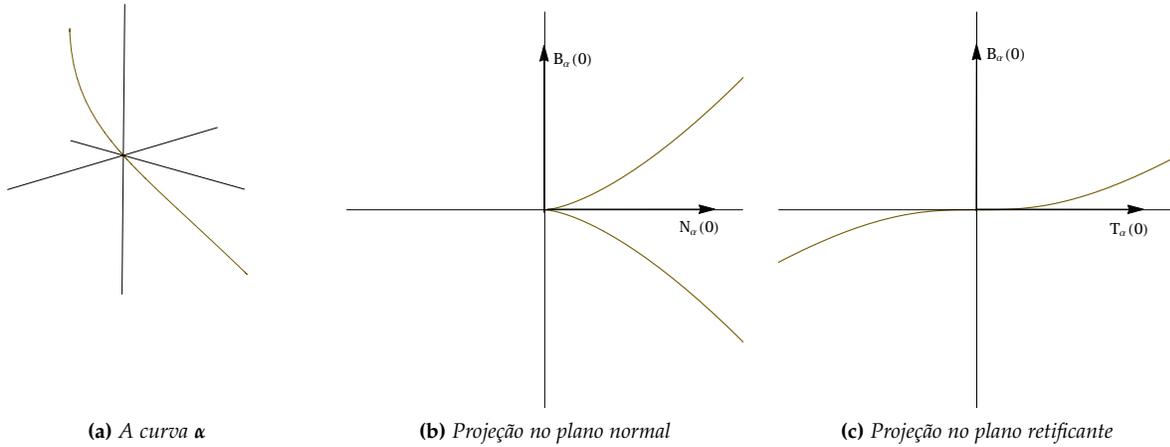


Figura 4: A forma canônica local de α .

Observamos que aqui, mesmo que os vetores do referencial de Cartan não sejam dois a dois ortogonais, ainda tomamos a liberdade de representá-los da forma acima, uma vez que para efeitos qualitativos, só é relevante que eles sejam linearmente independentes. Assim, concluímos que qualquer que seja o sinal da pseudo-torção, a curva sempre cruza o seu plano osculador no sentido do seu vetor binormal.

Já se α for de tipo semi-luz, teremos

$$\alpha(s) - R(s) = \left(s, \frac{s^2}{2} + \overline{\tau}_\alpha(0) \frac{s^3}{6}, 0 \right)_F.$$

Esta expressão e o Exemplo 5.11 são fortes indicativos de que a situação envolvendo curvas de tipo semi-luz na verdade é muito mais extrema:

Teorema 5.12. *Toda curva de tipo semi-luz é plana e está contida em um plano de tipo luz.*

Demonstração: Sendo $\alpha: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ uma curva de tipo semi-luz, buscamos $p, v \in \mathbb{L}^3$, com v de tipo luz, tais que $\langle \alpha(s) - p, v \rangle_L = 0$ para todo $s \in I$. Se isto acontecer, derivando duas vezes obtemos $\langle \mathbf{N}_\alpha(s), v \rangle_L = 0$, e concluímos que v deve ser paralelo a $\mathbf{N}_\alpha(s)$ (dois vetores de tipo luz ortogonais são paralelos). Motivados por isto, buscamos uma função $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ suave tal que $v = \lambda(s)\mathbf{N}_\alpha(s)$ seja constante. Isto nos leva à

$$0 = (\lambda'(s) + \overline{\tau}_\alpha(s)\lambda(s))\mathbf{N}_\alpha(s),$$

para todo $s \in I$. Defina v deste modo tomando

$$\lambda(s) = \exp\left(-\int_{s_0}^s \overline{\tau}_\alpha(\xi) d\xi\right),$$

para algum $s_0 \in I$ fixado. Por construção, v é constante e podemos então tomar $p = \alpha(s_0)$. Feito isso, a justificativa de que tais p e v satisfazem o pedido é a usual: considere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(s) = \langle \alpha(s) - \alpha(s_0), v \rangle_L$. Claramente $f(s_0) = 0$ e $f'(s) = \langle \mathbf{T}_\alpha(s), v \rangle_L = 0$ para todo $s \in I$. \square

Teorema 5.13 (Teorema Fundamental, segunda versão). *Sejam $\overline{\tau}: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $p_0 \in \mathbb{L}^3$, $s_0, \phi_0 \in I$ e (T_0, N_0, B_0) uma base positiva de \mathbb{L}^3 tal que B_0 é de tipo luz e (T_0, N_0) seja uma base positiva de um plano de tipo luz. Então:*

(i) se T_0 é de tipo luz, N_0 é unitário e $\langle T_0, B_0 \rangle_L = -1$, existe uma única curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ de tipo luz parametrizada por arco-fóton tal que

- $\alpha(\phi_0) = p_0$;
- $(T_\alpha(\phi_0), N_\alpha(\phi_0), B_\alpha(\phi_0)) = (T_0, N_0, B_0)$;
- $\bar{\alpha}(\phi) = \bar{\alpha}(\phi)$ para todo $\phi \in I$.

(ii) se T_0 é unitário, N_0 é de tipo luz e $\langle N_0, B_0 \rangle_L = -1$, existe uma única curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{L}^3$ de tipo semi-luz tal que

- $\alpha(s_0) = p_0$;
- $(T_\alpha(s_0), N_\alpha(s_0), B_\alpha(s_0)) = (T_0, N_0, B_0)$;
- $\bar{\alpha}(s) = \bar{\alpha}(s)$ para todo $s \in I$.

Demonstração: Trataremos apenas o primeiro caso. Considere o seguinte problema de valor inicial em \mathbb{R}^9 :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} T'(\phi) \\ N'(\phi) \\ B'(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \bar{\alpha}(\phi) & 0 & 1 \\ 0 & \bar{\alpha}(\phi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T(\phi) \\ N(\phi) \\ B(\phi) \end{pmatrix} \\ \text{e } (T(\phi_0), N(\phi_0), B(\phi_0)) = (T_0, N_0, B_0). \end{cases}$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade para sistemas de equações diferenciais ordinárias, existe uma única solução $(T(\phi), N(\phi), B(\phi))$ do sistema. Afirmamos que tal solução continua satisfazendo as condições da hipótese para todo $\phi \in I$, isto é: $T(\phi)$ e $B(\phi)$ são de tipo luz, $N(\phi)$ é unitário e ortogonal a $B(\phi)$, e ainda vale que $\langle T(\phi), B(\phi) \rangle_L = -1$. Com efeito, consideramos agora o seguinte problema de valor inicial para a curva $a : I \rightarrow \mathbb{R}^6$:

$$\begin{cases} a'(\phi) = A(\phi)a(\phi), \\ a(\phi_0) = (0, 1, 0, 0, -1, 0) \end{cases}$$

onde

$$A(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\bar{\alpha}(\phi) & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\bar{\alpha}(\phi) \\ \bar{\alpha}(\phi) & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{\alpha}(\phi) & 0 & 1 \\ 0 & \bar{\alpha}(\phi) & 1 & 0 & \bar{\alpha}(\phi) & 0 \end{pmatrix}.$$

Se as coordenadas de $a(\phi)$ são os produtos escalares² entre os vetores $T(\phi), N(\phi), B(\phi)$, soluções do problema de valor inicial anterior, concluímos que o vetor constante $a_0 = (0, 1, 0, 0, -1, 0)$ é a única solução com as condições iniciais dadas, donde segue-se nossa afirmação.

Feito isto, definimos

$$\alpha(\phi) = p_0 + \int_{\phi_0}^{\phi} T(\xi) d\xi.$$

Claramente temos $\alpha(\phi_0) = p_0$ e $\alpha'(\phi) = T(\phi)$, donde α é de tipo luz. Derivando novamente obtemos $\alpha''(\phi) = N(\phi)$, de modo que α está parametrizada por arco-fóton. Assim temos que $T_\alpha(\phi) = T(\phi)$ e $N_\alpha(\phi) = N(\phi)$, e a positividade de todas as bases envolvidas nos garante que $B_\alpha(\phi) = B(\phi)$ também.

²Em ordem, $a(\phi) = (\langle T(\phi), T(\phi) \rangle_L, \langle N(\phi), N(\phi) \rangle_L, \langle B(\phi), B(\phi) \rangle_L, \langle T(\phi), N(\phi) \rangle_L, \langle T(\phi), B(\phi) \rangle_L, \langle N(\phi), B(\phi) \rangle_L)$.

Com isto, derivar $\mathbf{N}_\alpha(\phi) = \mathbf{N}(\phi)$ nos dá

$$\overline{\mathfrak{T}}_\alpha(\phi)\mathbf{T}_\alpha(\phi) + \mathbf{B}_\alpha(\phi) = \overline{\mathfrak{T}}(\phi)\mathbf{T}(\phi) + \mathbf{B}(\phi),$$

e das igualdades anteriores obtidas segue que $\overline{\mathfrak{T}}_\alpha(\phi) = \overline{\mathfrak{T}}(\phi)$ para todo $\phi \in I$.

Finalmente, para verificar a unicidade de α , suponha que $\beta: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ seja outra curva de tipo luz, parametrizada por arco-fóton tal que $\alpha(\phi_0) = \beta(\phi_0)$, tendo o mesmo referencial de Cartan que α em ϕ_0 , e com a mesma pseudo-torção em todos os pontos. Tais condições implicam que ambos $(\mathbf{T}_\alpha(\phi), \mathbf{N}_\alpha(\phi), \mathbf{B}_\alpha(\phi))$ e $(\mathbf{T}_\beta(\phi), \mathbf{N}_\beta(\phi), \mathbf{B}_\beta(\phi))$ são soluções de um mesmo problema de valor inicial, e segue disto em particular que $\mathbf{T}_\alpha(\phi) = \mathbf{T}_\beta(\phi)$ para todo $\phi \in I$, de modo que α e β diferem por uma constante. Mas $\alpha(\phi_0) = \beta(\phi_0)$ garante que tal constante é zero, donde concluímos a unicidade desejada. \square

Corolário 5.14. *Duas curvas, ambas de tipo luz ou semi-luz, cujos planos osculadores estejam positivamente orientados as quais tenham mesma pseudo-torção diferem por uma transformação de Poincaré positiva de \mathbb{L}^3 .*

Demonstração: Sejam $\alpha, \beta: I \rightarrow \mathbb{L}^3$ duas curvas como no enunciado. Fixe qualquer $t_0 \in I$. Como as bases para os planos osculadores são positivamente orientadas, as bases de Cartan para as duas curvas estão nas condições da Proposição 3.5 (p. 4), que nos permite obter $F \in P(3, \mathbb{R})$, tal que $F(\alpha(t_0)) = \beta(t_0)$, $DF(\alpha(t_0))(\mathbf{T}_\alpha(t_0)) = \mathbf{T}_\beta(t_0)$, e analogamente para \mathbf{N} e \mathbf{B} . Tal F é na verdade positiva (pois sua parte linear leva uma base positiva em outra base positiva), e portanto preserva pseudo-torções, de modo que as curvas $F \circ \alpha$ e β estão agora nas condições do Teorema 5.13 acima. Concluímos que $\beta = F \circ \alpha$, como queríamos. \square

REFERÊNCIAS

- [1] M. P. do Carmo. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. SBM (Coleção Textos Universitários), 2012.
- [2] R. López. *Differential Geometry of Curves and Surfaces in Lorentz-Minkowski space*, eprint arXiv:0810.3351, 2008.
- [3] I. Terek, A. Lymeropoulos.; *Introdução a Geometria Lorentziana: Curvas e Superfícies*. SBM (Coleção Textos Universitários), 2018.