Fui andar em um metrô transfinito e olha no que deu!

LUCIANO ROCHA*

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo
luciano.renato.rocha@usp.br

Abstract

Existe uma música dos Engenheiros do Hawaii chamada "Parabólica" que cita "paralelas que se cruzam em Belém do Pará". Além disso, como belenense, posso falar com propriedade que a capital paraense fica longe pra caramba. Desta forma, utilizando um pouco de geometria projetiva, podemos supor que Belém fica no infinito. Mostraremos que ir de metrô até lá pode ser uma jornada bem complicada.

1. INTRODUÇÃO

Neste texto trataremos sobre Teoria dos Conjuntos, uma área que possui como um de seus objetivos fundamentar a matemática. Para tal, foi elaborada uma lista de axiomas (que não apresentaremos aqui) que nos permite construir a matemática da forma como estamos habituados. Faremos algumas destas construções.

Na Seção 2 iremos enunciar o Problema do Metrô Transfinito. Na Seção 3 faremos algumas das construções formais que são necessárias para explicar e resolver o problema (portanto, não se assuste se você desconhecer algum termo presente no enunciado, explicaremos nesta seção). Por fim, na Seção 4 apresentaremos uma bela solução para o problema.

2. O PROBLEMA

Suponha uma linha de metrô transfinita que liga São Carlos a Belém, cujas estações estão rotuladas, em ordem, por números ordinais, com São Carlos na Estação 0 e Belém na Estação ω_1. Suponha também que esta linha bastante singular possua as seguintes regras de funcionamento: inicialmente, antes de partir de São Carlos, um infinito enumerável de pessoas entra no metrô. Depois, para cada estação onde o metrô para, exatamente uma pessoa desembarca (caso o metrô não esteja vazio, claro) e um infinito enumerável de novas pessoas entra no metrô. A pessoa que desembarcou não pode embarcar novamente em nenhuma estação.

A pergunta é: quantas pessoas desembarcam em Belém, na Estação ω_1?

*Agradecimentos ao Leandro Aurichi por me ensinar a gostar de conjuntos e ao Renan Mezabarba e aos/às pareceristas pelas sugestões.

3. Ordinais

No princípio, havia apenas o conjunto vazio, denotado por $\varnothing$. E ele era bom. Com este conjunto e algumas operações sobre ele, podemos formalizar os números naturais:

$$
\begin{aligned}
&0 := \varnothing \\
&1 := \{\varnothing\} = \{0\} \\
&2 := \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\} \\
&3 := \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Veja que os naturais construídos desta forma possuem propriedades muito interessantes. Primeiramente, se n é um natural, então seu sucessor é dado por $n \cup \{n\}$. Ademais, todo elemento de n é também um subconjunto de n. Isto é, os números naturais são **transitivos**:

Definição 1. *Um conjunto X é dito **transitivo** se, para todo $Y \in X$, temos $Y \subset X$.*

Outra propriedade dos números naturais é que eles são **bem ordenados**:

Definição 2. *Um conjunto X é dito **bem ordenado** se a ordem ($\leq$) sobre ele é tal que, para todo subconjunto não-vazio $Y \subset X$, existe um mínimo de Y. Isto é, existe $y' \in Y$ tal que $y' \leq y$ para todo $y \in Y$.*

Diferentemente dos números naturais, o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, por exemplo, não é bem ordenado com respeito à ordem que estamos habituados, pois nem ele próprio possui mínimo.

Definição 3. *Um conjunto α é dito **ordinal** se é transitivo e bem ordenado com respeito a $\in$.*

Faz sentido falarmos de boa ordem com respeito a $\in$ pois $a < b$ se, e somente se, $a \in b$ é uma ordem. De fato, foi a ordem que utilizamos nos naturais como anteriormente construído. Então veja que, em particular, os números naturais são ordinais.

Mas o que vem depois? Qual o menor ordinal maior que (ou seja, que contém) todos os números naturais? Ora, este é exatamente o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$! Quando nos referimos à $\mathbb{N}$ no contexto de ordinais, o denotamos por ω_0 ou simplesmente ω.

Fixado um ordinal α, existe um ordinal β que é o menor dentre todos os ordinais maiores que α. Dizemos que β é o **sucessor** de α. Veja que $\beta = \alpha \cup \{\alpha\}$. Denotaremos $\alpha \cup \{\alpha\}$ por $\alpha + 1$.

Assim, depois de ω vem $\omega + 1, \omega + 2, \ldots, \omega + \omega = \omega \cdot 2, \ldots, \omega \cdot 3, \ldots, \omega \cdot \omega = \omega^2, \ldots, \omega^\omega \ldots$ e assim por diante.

3.1 Pausa para respirar

Explicaremos aqui o porquê deste animal se chamar "ordinal" e assim o compreenderemos melhor. Um ordinal representa nada mais do que uma forma de bem ordenar um conjunto. Uma forma de fazer uma fila. Para um conjunto finito, com n elementos, há uma única forma de ordená-lo: você escolhe um primeiro elemento, um segundo, um terceiro, etc.., até um n-ésimo elemento, ganhando o ordinal n. Mas isso já não é verdade quando pensamos em conjuntos infinitos. Por exemplo, podemos ordenar $\mathbb{N}$ da forma usual, representada pelo ordinal ω, ou podemos escolher um número n e colocá-lo no final da fila, ganhando uma ordenação do tipo $0, 1, \ldots, n-1, n+1, \ldots, n$, representada pelo ordinal $\omega + 1$. Veja que essas são de fato duas formas essencialmente diferentes de ordenar $\mathbb{N}$, pois a primeira não possui elemento máximo, enquanto a segunda, sim.

Outro exemplo: para vizualizar $\omega + \omega$, considere uma ordenação de $\mathbb{N}$ que impõe que todos os ímpares são menores do que todos os pares, mantendo a ordem usual de ímpares e pares entre si. Estamos falando de uma ordenação da forma $1, 3, 5, \ldots, 2k+1, \ldots, 2, 4, \ldots, 2k, \ldots$

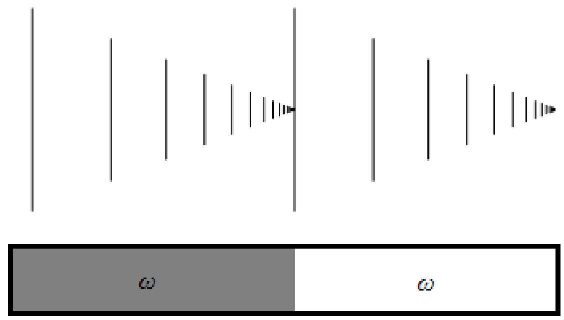

Figura 1: *Ilustração de $\omega + \omega$*

No link <www.madore.org/~david/math/drawordinals> você pode vizualizar uma série de ordinais, como ω^2 e ω^ω.

Se você já ouviu falar de cardinais, não os confunda com ordinais: Todos esses ordinais infinitos que apresentamos são **enumeráveis**, o que significa que existe uma bijeção entre cada um deles e ω. Isso quer dizer que, em algum sentido, eles têm "o mesmo tamanho" (a mesma cardinalidade) de ω. Apesar disso, são diferentes como ordinais, pois não há uma bijeção que preserva ordem entre eles.

3.2 ω_1

Ao primeiro ordinal não enumerável, isto é, o primeiro ordinal tal que não existe uma bijeção entre ele e ω, chamamos de ω_1. Como conjunto, ω_1 é exatamente o conjunto de todos os ordinais enumeráveis. Este rapaz possui propriedades que serão cruciais para a resolução do problema que apresentamos, como esta a seguir.

Proposição 4. *Todo conjunto enumerável $A \subset \omega_1$ é limitado.*

Dem.: Queremos mostrar que, se $A \subset \omega_1$ é enumerável, então existe $\beta \in \omega_1$ tal que $\xi < \beta$ para todo $\xi \in A$.

Suponha que não. Então para todo $\beta < \omega_1$ existe $\xi \in A$ tal que $\beta < \xi$. Segue que $\omega_1 = \bigcup_{\xi \in A} \{\beta \in \omega_1 : \beta < \xi\}$. Como $\xi < \omega_1$ é enumerável (pois ω_1 é o menor não enumerável) e união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável, concluímos que ω_1 é enumerável, o que é uma contradição. Portanto, segue o resultado. $\square$

Antes tínhamos uma sensação de que números e conjuntos eram entidades completamente distintas. Mas é importante notar que, na verdade, tudo é conjunto. Assim, nada nos impede de definir uma função $f : 2 \to 2$, por exemplo, ou $f : \alpha \to \beta$, onde α e β são ordinais.

Aqui terminamos as preliminares. Agora vamos à resolução do problema.

4. Resolução do Problema

Definição 5. *Seja $f : \omega_1 \to \omega_1$ uma função. Dizemos que um ordinal $\beta < \omega_1$ é um ponto **bom** de f se, para todo $\alpha < \beta$, temos $f(\alpha) < \beta$.*

O Lema a seguir é o mais burocrático deste texto. As outras demonstrações seguirão facilmente dele.

Lema 6. *Seja $f : \omega_1 \to \omega_1$ uma função e $\alpha < \omega_1$. Então existe um ordinal β tal que $\alpha < \beta < \omega_1$ e β é um ponto bom de f. Ou seja, os pontos bons de f são ilimitados em ω_1.*

Dem.: Construiremos uma sequência $(\alpha_n)_{n\in\omega}$ crescente de ordinais de forma indutiva. Defina $\alpha_0 = \alpha$. Seja $A_0 = \{f(\xi) : \xi < \alpha_0\}$. Veja que $\alpha_0 < \omega_1$ é enumerável, implicando que A_0 também é enumerável e, portanto, limitado (proposição 4). Assim, seja $\gamma_0 < \omega_1$ um ordinal tal que $\gamma_0 > \eta$ para todo $\eta \in A_0$. Então escolha um ordinal $\alpha_1 < \omega_1$ tal que $\alpha_1 > \max\{\gamma_0, \alpha_0\}$.

Dado $n \in \omega$, suponha definidos α_i para todo $i < n$ com $\alpha_i < \omega_1$ e $\alpha_i > \max\{\gamma_{i-1}, \alpha_{i-1}\}$, onde γ_{i-1} é limitante superior de $A_{i-1} = \{f(\xi) : \xi < \alpha_{i-1}\}$ (que é limitado pelo mesmo argumento que usamos em A_0). Então basta escolher $\alpha_n > \max\{\gamma_{n-1}, \alpha_{n-1}\}$ e teremos construído a sequência.

Novamente pela proposição 4, $\sup_{n\in\omega} \alpha_n = \beta < \omega_1$. Mostraremos que este é o ordinal procurado. É claro que $\alpha < \beta$. Para ver que β é um ponto bom de f, tome $\xi < \beta$. Como β é supremo dos α_n's, existe $i \in \omega$ tal que $\alpha_i > \xi$. Então segue da definição dos A_n's que $f(\xi) \in A_i$ e, portanto, $f(\xi) < \alpha_{i+1} < \beta$. Concluimos que β é de fato um ponto bom de f. □

Agora vamos modelar nosso problema. Considere uma estação $\alpha < \omega_1$ qualquer. Chamaremos de B_α o conjunto dos $\eta < \omega_1$ tais que uma pessoa que entrou no metrô na estação α saiu na estação η. Note que, pelas regras do metrô, apenas um número enumerável de pessoas pode entrar na estação α, logo apenas um número enumerável dessas pessoas pode sair e, portanto, B_α é limitado em ω_1. Defina então a função $f : \omega_1 \to \omega_1$ tal que $f(\alpha) = \sup B_\alpha$ se $B_\alpha \neq \emptyset$ e $f(\alpha) = \alpha$ se $B_\alpha = \emptyset$.

Lema 7. *Se β é um ponto bom de f, então o metrô estava vazio ao chegar na estação β.*

Dem.: Suponha que não. Então alguma pessoa desembarcou na estação β. Ora, isso significa que essa pessoa entrou no trem em algum momento, digamos na estação $\alpha < \beta$. Logo $\beta \in B_\alpha$ e do jeito que construímos nossa f, $f(\alpha) \geq \beta$, o que contradiz o fato de β ser um ponto bom. □

Note que, a priori, isso não nos dá uma resposta ao problema, pois na estação β um infinito enumerável de novas pessoas entrará no metrô. Usaremos o fato dos pontos bons serem ilimitados em ω_1 para contornar este problema.

Proposição 8. *O metrô chegará completamente vazio em Belém!!!*

Dem.: Suponha que um passageiro chamado Apolinário tenha chegado ao destino final. Então Apolinário entrou no metrô em algum momento, digamos na estação $\alpha < \omega_1$. Pelo Lema 6, existe $\beta > \alpha$ que é ponto bom de f. Pelo Lema 7, ao chegar na estação β, o metrô estará vazio e, em particular, Apolinário terá desembarcado. Pelas regras do metrô, ele não poderá embarcar novamente em nenhuma outra estação, logo ele não chegará à Belém, contradizendo nossa hipótese. □

Moral da história: pense duas vezes antes de trocar um avião por um metrô transfinito.

References

AURICHI, L. F. Notas de Aula de Aplicações de Teoria dos Conjuntos. Disponível em <https://conteudo.icmc.usp.br/pessoas/aurichi/doku.php?id=curso:conjuntos2018>. *Acessado em 24 de julho de 2018.*

LAMBIE-HANSON, C. The Transfinite Subway. Disponível em <https://pointatinfinityblog.wordpress.com/2016/04/28/the-transfinite-subway/>. *Acessado em 24 de julho de 2018.*

BAEZ, J. C. Large Countable Ordinals (Part 1). Disponível em <https://johncarlosbaez.wordpress.com/2016/06/29/large-countable-ordinals-part-1/>. *Acessado em 24 de julho de 2018.*