

Uma história dos polígonos regulares

CAIO HENRIQUE SILVA DE SOUZA

caiohsouza36@gmail.com

GABRIEL LONGATTO CLEMENTE

clemente@dm.ufscar.br

Universidade Federal de São Carlos

Resumo

Um dos problemas clássicos dos gregos antigos consistia na construção de um heptágono regular com régua e compasso. Este problema é bem menos conhecido do que os problemas da Quadratura do Círculo, da Duplicação do Cubo e da Trissecção do Ângulo e, por isso, nos chamou atenção. Neste trabalho pretendemos expor a única tentativa grega de solução do mesmo que chegou até nosso tempo, além de estudar a construtibilidade de polígonos regulares usando a linguagem moderna. Creemos que o paralelo entre a tentativa passada de resolução e a solução moderna traz perspectivas que são fundamentais para o contexto histórico-matemático do problema.

1. INTRODUÇÃO

Os gregos antigos desenvolveram a *Geometria* de forma primorosa, como pode ser visto na obra *Elementos* de Euclides (360-295). Nesta o rigor matemático perpassou a área através de uma primeira base axiomática. Posteriormente, a *Geometria Euclidiana*, pensada a partir da régua e do compasso, continuou seu desenvolvimento em outras culturas ao longo dos séculos, relacionando-se mais e mais com outras áreas da Matemática.

Dentro das construções com régua e compasso uma classe de figuras é nosso objeto principal aqui: os **polígonos regulares**. Nos preocupamos neste trabalho em traçar um paralelo entre a percepção clássica do problema de construção de polígonos regulares com a solução moderna do mesmo que faz uso de técnicas algébricas. Na verdade vamos apresentar alguns conceitos algébricos e usá-los para mostrar algumas coisas, dentre elas, a não construtibilidade do heptágono regular com régua e compasso.

As construções geométricas funcionam de certa forma como um jogo no qual nosso objetivo é alcançado quando nossa figura, propriedade, operação entre grandezas ou números, vê-se desenhada no papel. Para jogar é necessário obedecer às seguintes regras: nossas únicas ferramentas disponíveis são uma **régua sem marcação** e um **compasso**. Além disso, como se pode ver na Figura 1.1, são três as operações elementares que dispomos em se tratando de construções geométricas:

1. traçar uma reta passando por dois pontos;
2. desenhar uma circunferência com raio e centro dados;
3. continuar um segmento indefinidamente.

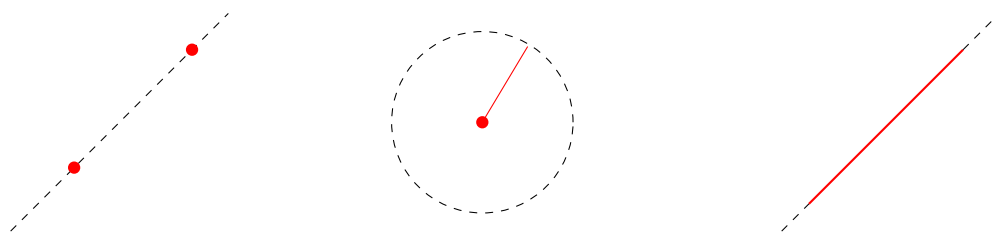


Figura 1.1: Operações elementares.

A partir destas operações elementares aumentamos nosso arsenal com retas perpendiculares, bissecção de ângulos, multiplicação de ângulos por números inteiros, traçado de paralelas, dentre outras construções. Para fazer isso, como se pode ver na Figura 1.2, combinamos essas operações da seguinte forma:

1. intersectando duas retas;
2. intersectando uma reta e uma circunferência;
3. intersectando duas circunferências.

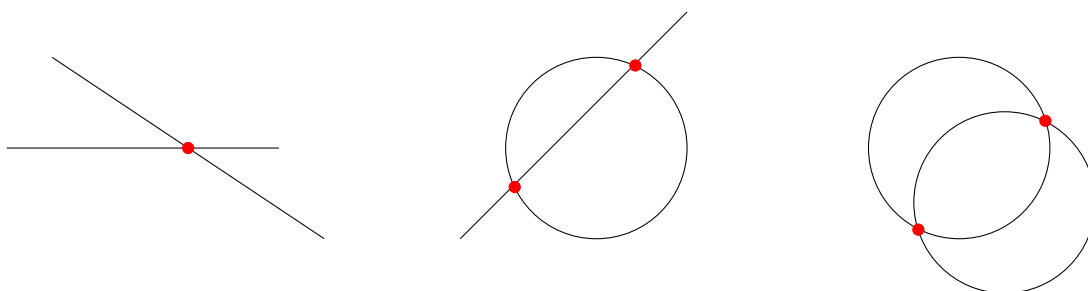


Figura 1.2: Formas de combinar as operações elementares.

Neste texto consideramos os polígonos regulares a menos de dilatações, translações e rotações. Ou seja, o comprimento dos lados de um polígono regular e a posição dele no plano não são fatores importantes para nós.

Vamos agora considerar alguns exemplos de polígonos regulares construtíveis. Dentre eles veremos as construções do triângulo equilátero, do quadrado, do pentágono regular e do hexágono regular. A partir disso vamos mostrar algumas famílias de polígonos regulares construtíveis e um primeiro método para saber se um polígono regular é construtível a partir da construtibilidade de outros dois polígonos a ele associados.

Exemplo 1.1 (Triângulo equilátero). *Por um ponto A traçamos uma circunferência γ_1 . Por um ponto qualquer desta circunferência, digamos B , traçamos outra circunferência γ_2 cujo raio é o mesmo da circunferência γ_1 . A interseção de γ_1 e γ_2 é dois pontos distintos. Chamamos um destes pontos de C . O triângulo ΔABC é o triângulo equilátero. Vide Figura 1.3. \diamond*

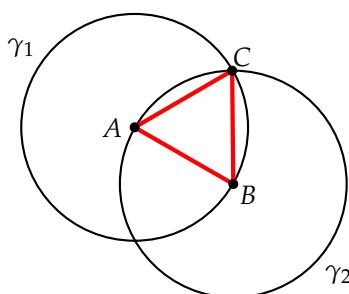


Figura 1.3: A figura ilustra os objetos usados na construção do triângulo equilátero ΔABC .

Exemplo 1.2 (Quadrado). Sobre uma reta suporte r escolhemos um ponto A e um ponto B . Traçamos as perpendiculares s_1 e s_2 à reta r que passam, respectivamente, pelos pontos A e B . Com o compasso, marcamos o comprimento do segmento AB sobre a reta s_1 a partir do ponto A e sobre a reta s_2 a partir do ponto B . Estas marcações delimitam pontos D e C sobre as retas s_1 e s_2 , respectivamente. O quadrilátero $ABCD$ é o quadrado. Vide Figura 1.4. \diamond

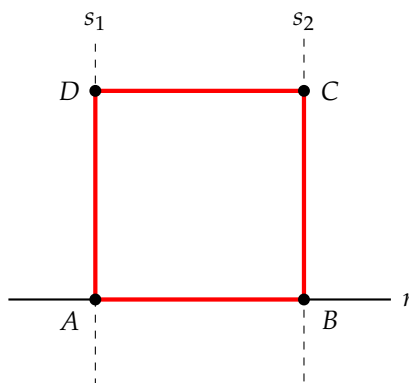


Figura 1.4: A figura ilustra os objetos usados na construção do quadrado $ABCD$.

Exemplo 1.3 (Pentágono regular). Por um ponto O traçamos uma circunferência γ_1 . Nesta circunferência traçamos dois diâmetros perpendiculares que determinam quatro pontos E, F, G e H sobre ela. Dividimos o segmento OE pela metade, determinando o ponto I . Com centro em I e raio de mesma medida que o segmento FI , traçamos uma circunferência γ_2 . Chamamos o ponto de interseção desta circunferência com o segmento OG de J . Com comprimento FJ traçamos uma circunferência γ_3 com centro em E . A interseção de γ_3 com γ_1 determina dois pontos, que chamamos de A e D . Com centro em A e raio de comprimento FJ traçamos uma circunferência γ_4 que intersecta γ_1 em E e num novo ponto, que chamamos de B . Com centro em D e raio de comprimento FJ traçamos uma circunferência γ_5 que intersecta γ_1 em E e num novo ponto, que chamamos de C . O polígono $ABCDE$ é o pentágono regular. Vide Figura 1.5. \diamond

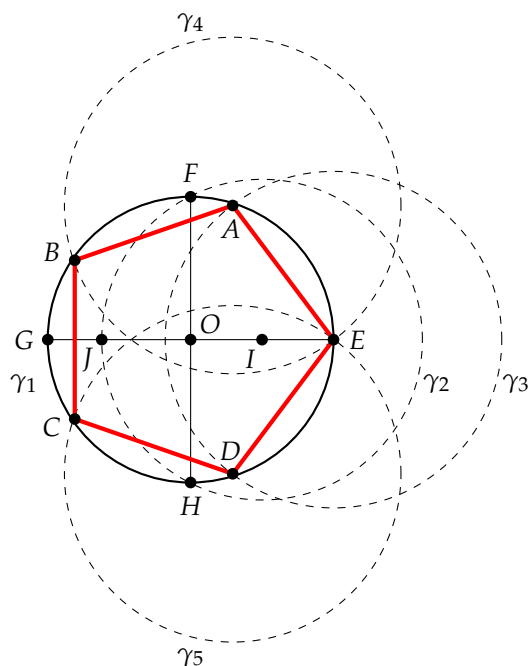


Figura 1.5: A figura ilustra os objetos usados na construção do pentágono regular $ABCDE$.

Exemplo 1.4 (Hexágono regular). Feito um triângulo equilátero $\triangle ABC$ como no Exemplo 1.1, circunscrevemos a ele uma circunferência. Traçamos as três alturas do triângulo e determinamos assim os ângulos $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle ADB$ e $\sphericalangle BDC$. Como AC , AB e BC são cordas congruentes da circunferência, elas determinam o mesmo ângulo central. Logo, $\sphericalangle ADC$, $\sphericalangle ADB$ e $\sphericalangle BDC$ têm a mesma medida. Traçando a bissetriz destes três ângulos e marcando as interseções que estas fazem com a circunferência, temos os pontos A , B , C (originais do triângulo equilátero), H , I e J . Como os ângulos bissectados eram congruentes, as cordas HC , HA , AI , IB , BJ e JC são também congruentes. Portanto, seus respectivos segmentos são congruentes e o polígono $AIBJCH$ é o hexágono regular. Vide Figura 1.6. \diamond

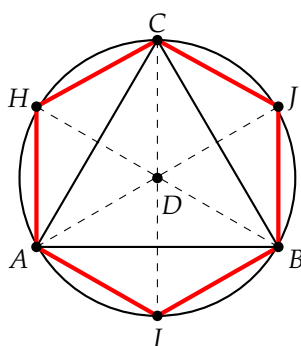


Figura 1.6: A figura ilustra os objetos usados na construção do hexágono regular $AIBJCH$.

Aplicando o processo de bissecção de ângulos descrito na construção do hexágono regular, podemos demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 1.1 (Lema de Bissecção). *Seja n um número natural maior do que dois. Se o polígono regular de n lados é construtível, então, para todo $k \in \mathbb{N}$, o polígono regular de $(n \cdot 2^k)$ lados é construtível.* \square

Em particular, sabemos agora que podemos construir:

- o decágono regular e todos os polígonos regulares com número de lados $(5 \cdot 2^k)$, com $k \in \mathbb{N}$;
- o dodecágono regular e todos os polígonos regulares com número de lados $(3 \cdot 2^k)$, com $k \in \mathbb{N}$.

Entretanto, para além deste resultado inicial, quando podemos saber sobre a construtibilidade de um polígono regular a partir da construtibilidade de outro? Abaixo respondemos parcialmente esta pergunta relacionando a construtibilidade do polígono regular de nm lados com a construtibilidade dos polígonos regulares de n e m lados. Para isso, entretanto, é necessária a hipótese de que n e m sejam números primos entre si.

Teorema 1.2 (Lema da Composição). *Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ com $\text{mdc}(n, m) = 1$. Então os polígonos regulares de n e m lados são construtíveis se, e somente se, o polígono regular de nm lados é construtível.*

Demonstração. (\Rightarrow) Sendo que $\text{mdc}(n, m) = 1$, existem $a, b \in \mathbb{Z}$ de sorte que $an + bm = 1$. Portanto,

$$\frac{2\pi}{nm} = 2\pi \cdot \left(\frac{an + bm}{nm} \right) = 2\pi \cdot \left(\frac{a}{m} + \frac{b}{n} \right) = a \cdot \frac{2\pi}{m} + b \cdot \frac{2\pi}{n}. \quad (1)$$

Se os polígonos regulares de n e m lados são construtíveis, então os seus ângulos internos $\frac{2\pi}{n}$ e $\frac{2\pi}{m}$ são também construtíveis. Devido à Equação (1), portanto, o ângulo $\frac{2\pi}{nm}$ é construtível. Daí segue o polígono regular de nm lados ser construtível.

(\Leftarrow) Se o polígono regular de nm lados é construtível, então enumeramos seus vértices em sequência de 1 a nm , como na Figura 1.7. Unindo os vértices 1, $m + 1$, $2m + 1$, $3m + 1$, \dots , $(n - 1)m + 1$ e 1 temos o polígono regular de n lados. Unindo os vértices 1, $n + 1$, $2n + 1$, $3n + 1$, \dots , $(m - 1)n + 1$ e 1 temos o polígono regular de m lados. \square

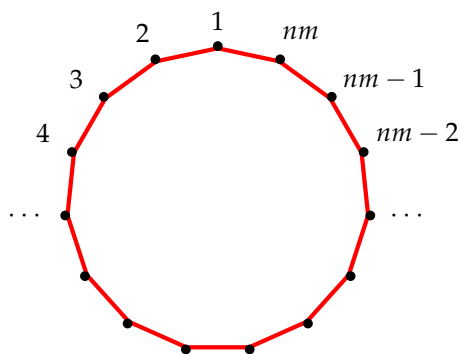


Figura 1.7: Polígono regular de nm lados.

2. DESCARTES E A CONSTRUTIBILIDADE

O primeiro passo importante cuja direção consistiu em demonstrar a impossibilidade de certas construções geométricas com régua e compasso foi dado por **René Descartes** (1596-1650) em sua obra *La Géométrie*, publicada em 1637. O passo crucial de Descartes foi identificar os comprimentos dos segmentos de retas com números reais. Assim tornou-se possível reenunciar um problema geométrico em termos algébricos, expressar a solução simbolicamente e, então, converter a expressão algébrica em um processo de construção geométrico.



Figura 2.1: René Descartes, por Frans Hals.

A fim de garantir a passagem de uma expressão algébrica para um processo de construção geométrico, faz-se necessário definir uma aritmética com as retas. E é precisamente isso que discutiremos agora. Sejam AB e CD segmentos de reta. As técnicas de régua e compasso clássicas nos permitem encontrar segmentos que correspondem à soma $AB + CD$, à diferença $AB - CD$ e, para qualquer α racional positivo, ao produto $\alpha \cdot AB$. O primeiro problema que encontramos é interpretar o produto $AB \cdot CD$. Esta aparente falta de significado faz com que a aritmética de segmentos de reta não seja fechada ante a multiplicação e, *a fortiori*, não seja fechada ante a divisão de segmentos. Descartes concebeu então que a *Teoria das Proporções* poderia ser usada para associar ao produto de dois segmentos de reta um outro segmento de reta. Para isso, contudo, seria necessário fixar um segmento de reta de comprimento unitário. Explicitamente, se duas retas se intersectam em um ponto B e desejamos multiplicar os segmentos BC e BD , então marcamos BA com comprimento unitário e unimos os pontos A e C por um segmento de reta. Traçamos agora o segmento DE paralelo ao segmento AC . Os triângulos $\triangle BAC$ e $\triangle BDE$ são semelhantes. Sendo assim:

$$\frac{BE}{BD} = \frac{BC}{BA}$$

Isto corresponde à igualdade dos produtos $BE \cdot BA = BC \cdot BD$. Uma vez que BA tem comprimento unitário, podemos identificar o segmento BE com o produto $BC \cdot BD$. De forma muito semelhante trata-se a divisão de segmentos.

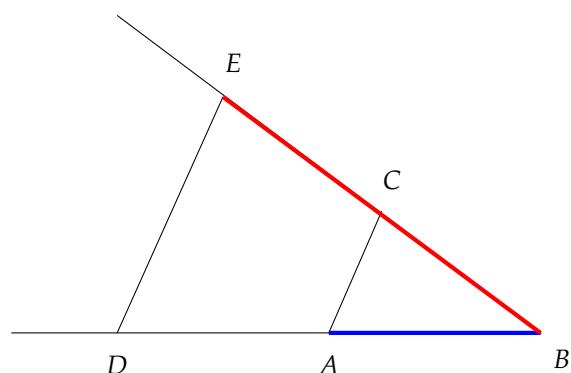


Figura 2.2: O segmento AB , em azul, é o segmento unitário fixado, ao passo que o segmento BE , em vermelho, é o produto dos segmentos BC e BD . Analogamente, se encontra a divisão de segmentos de reta.

Descartes também produziu um método para extrair a raiz quadrada de um segmento de reta. Enfatizadamente, se quisermos encontrar a raiz quadrada de um segmento GH , então o estendemos por um segmento GF de comprimento unitário. Daí, desenhamos o círculo que tem FH como diâmetro e traçamos o segmento perpendicular GI . Como os triângulos ΔHIF , ΔFGI e ΔHGI são todos semelhantes:

$$\left(\frac{GF}{GI} = \frac{GI}{GH}\right) \Leftrightarrow GI^2 = GF \cdot GH.$$

Sendo $GH = 1$, segue que GI é a raiz quadrada do segmento GH .

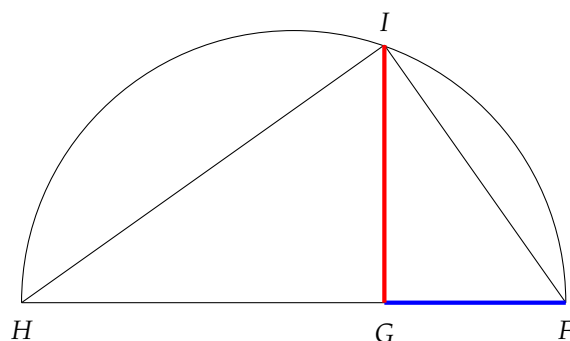


Figura 2.3: O segmento GF , em azul, é o segmento unitário fixado, ao passo que o segmento GI , em vermelho, é a raiz quadrada do segmento GH .

Tendo em vista a aritmética de segmentos de reta que acabamos de construir, e sendo AB um segmento de reta qualquer, diremos doravante que um valor α é um **número construtível** se pudermos construir um segmento de reta cujo comprimento seja $\alpha \cdot AB$. Finalmente, um objeto geométrico será dito **construtível** se cada um de seus componentes admitir construção por régua e compasso.

3. ALGUMAS NOÇÕES DE ÁLGEBRA

Iniciamos esta seção dizendo um pouco sobre corpos e espaços vetoriais. Depois abordaremos a noção de extensão de corpos e de grau de extensão que são suficientes para decidirmos se um dado objeto é construtível com régua e compasso ou não. Vamos começar com um exemplo importante: o conjunto dos números reais \mathbb{R} . Em \mathbb{R} temos duas operações bem conhecidas: a soma e a multiplicação. Estas duas operações possuem algumas propriedades. A soma verifica, para $a, b, c \in \mathbb{R}$:

(i) **(associatividade)** $(a + b) + c = a + (b + c)$;

(ii) **(comutatividade)** $a + b = b + a$;

(iii) **(existência de elemento neutro)** $a + 0 = 0 + a = a$;

(iv) **(existência de oposto aditivo)** $a + (-a) = (-a) + a = 0$.

Já a multiplicação, por sua vez, verifica, para $a, b, c \in \mathbb{R}$:

(v) **(associatividade)** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

(vi) **(comutatividade)** $a \cdot b = b \cdot a$;

(vii) **(existência de elemento neutro)** $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$;

(viii) **(existência de inverso multiplicativo)** $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ para todo $a \neq 0$.

As operações soma e multiplicação ainda se relacionam através da:

(ix) **(distributividade)** $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

A operação de soma em \mathbb{R} leva um par de números reais (a, b) no número real $a + b$ bem como a operação de multiplicação em \mathbb{R} leva um par de números reais (a, b) no número real $a \cdot b$. Formalmente, estas duas operações são funções cujos domínios são $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e cujos contradomínios são \mathbb{R} . O conjunto dos números reais \mathbb{R} com estas operações é uma estrutura algébrica que chamamos de corpo. A definição a seguir contém a noção geral de corpo.

Definição 3.1 (Corpo). *Seja \mathbb{K} um conjunto não vazio. Seja $+$: $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ uma função que verifica as propriedades (i), (ii), (iii) e (iv). Seja \cdot : $\mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ uma função que verifica as propriedades (v), (vi), (vii), (viii) e que se relaciona com $+$ através de (ix). As funções $+$ e \cdot são ditas, respectivamente, operação soma e operação multiplicação ou produto. Dizemos, nesta situação, que o conjunto \mathbb{K} com estas operações é um corpo.* \diamond

Vejam agora um tipo especial de corpo. No conjunto dos números racionais \mathbb{Q} , como em \mathbb{R} , temos as operações soma e multiplicação e estas satisfazem às mesmas propriedades que a soma e a multiplicação de números reais satisfazem. Por isso, \mathbb{Q} é um corpo com a soma e multiplicação tradicionais de números racionais. Mais que isso, \mathbb{Q} é um subconjunto de \mathbb{R} e a soma e a multiplicação de números reais, quando restritas ao conjunto \mathbb{Q} , coincidem com a soma e com a multiplicação de números racionais. Portanto, dizemos que \mathbb{Q} é um subcorpo do corpo \mathbb{R} . A definição a seguir apresenta a noção geral de subcorpo.

Definição 3.2 (Subcorpo). *Sejam \mathbb{K} um corpo e $+, \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ suas operações. Um subconjunto $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ não vazio tal que estejam bem definidas as restrições $+\mathbb{L} : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ e $\cdot\mathbb{L} : \mathbb{L} \times \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$ é dito um **subcorpo** de \mathbb{K} com estas operações restritas.* \diamond

Exemplo 3.1 (Subcorpos em cadeia). *Consideremos o corpo dos números complexos \mathbb{C} , o corpo dos números reais \mathbb{R} e o corpo dos números racionais \mathbb{Q} . Temos que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, isto é, \mathbb{Q} é subcorpo de \mathbb{R} , enquanto \mathbb{R} é subcorpo de \mathbb{C} e, por conseguinte, \mathbb{Q} é subcorpo de \mathbb{C} .* \diamond

Na situação do exemplo acima dizemos que \mathbb{C} é uma extensão dos corpos \mathbb{Q} e \mathbb{R} , da mesma forma que \mathbb{R} é uma extensão de \mathbb{Q} . A definição seguinte apresenta a noção de extensão de corpos de forma geral.

Definição 3.3 (Extensão de corpos). *Dizemos que um corpo \mathbb{K} é uma **extensão** de um corpo \mathbb{F} , e denotamos $\mathbb{K} : \mathbb{F}$, se \mathbb{F} é um subcorpo de \mathbb{K} .* \diamond

Exemplo 3.2 (Subcorpos intermediários entre \mathbb{Q} e \mathbb{R}). *Podemos construir extensões \mathbb{K} de \mathbb{Q} de forma que estas sejam intermediárias entre \mathbb{Q} e \mathbb{R} , isto é, sem que $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ ou que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ com as operações soma e produto dadas pelas restrições da soma e do produto de números reais é um subcorpo de \mathbb{R} . Como $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, se restringirmos agora as operações de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ a \mathbb{Q} vemos que este é subcorpo daquele.* \diamond

Mais geralmente, se α é um número inteiro que não é divisível por um número primo ao quadrado, então o conjunto $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) \subset \mathbb{C}$ (pois o inteiro α pode ser negativo) com as operações soma e produto dadas pelas restrições da soma e do produto de números complexos é um subcorpo de \mathbb{C} e uma extensão de \mathbb{Q} diferente de \mathbb{R} e de \mathbb{C} . Estes subcorpos serão muito importantes no estudo da construtibilidade de polígonos, uma vez que poderemos associar às operações elementares equações algébricas a serem resolvidas nestes subcorpos de \mathbb{C} .

Precisaremos ainda de uma outra estrutura algébrica bastante importante. Seja $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Este conjunto é visto geometricamente como o plano cartesiano. Os pares de números reais (a, b) são chamados de vetores. Números reais que não componham pares ordenados são denotados por letras gregas minúsculas (α, β, γ , etc.) nesta seção. Existem duas operações naturais em \mathbb{R}^2 : a soma de vetores e a multiplicação por escalares. Como antes estas operações são funções. A soma é a função:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ ((a, b), (c, d)) &\longmapsto (a + c, b + d) \end{aligned}$$

e a multiplicação por escalar é a função:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2, \\ (\alpha, (a, b)) &\longmapsto (\alpha \cdot a, \alpha \cdot b) \end{aligned}$$

Estas operações não são quaisquer. De fato, longe disso, elas verificam propriedades muito especiais! Para a soma de vetores vale a associatividade, a comutatividade, a existência de elemento neutro e a existência de elemento oposto. Já para o produto por escalar valem as seguintes propriedades:

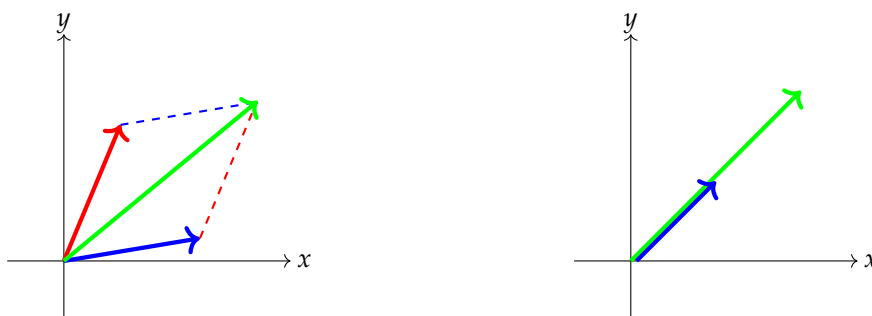


Figura 3.1: À esquerda o vetor maior (em verde) representa geometricamente a soma dos outros dois vetores (em azul e em vermelho). À direita o vetor maior (em verde) representa o produto do vetor menor (em azul) por um escalar $\alpha > 1$.

- (x) (**associatividade**) $(\alpha \cdot \beta) \cdot (a, b) = \alpha \cdot (\beta \cdot (a, b))$;
- (xi) (**distributividade por escalar**) $(\alpha + \beta) \cdot (a, b) = \alpha \cdot (a, b) + \beta \cdot (a, b)$;
- (xii) (**distributividade por vetores**) $\alpha \cdot ((a, b) + (c, d)) = \alpha \cdot (a, b) + \alpha \cdot (c, d)$;
- (xiii) (**existência de multiplicador identidade**) $1 \cdot (a, b) = (a, b)$.

O conjunto \mathbb{R}^2 com estas operações é uma estrutura algébrica que chamamos de espaço vetorial sobre o corpo dos números reais \mathbb{R} . A definição a seguir contém a noção geral de espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} qualquer.

Definição 3.4 (Espaço vetorial). *Sejam V um conjunto não vazio e \mathbb{K} um corpo. Chamamos os elementos de V de vetores. Seja $+$: $V \times V \rightarrow V$ uma função que verifica as propriedades (i), (ii), (iii) e (iv). Ao elemento neutro de $+$ damos o nome de vetor nulo. Seja \cdot : $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ uma função que verifica as propriedades (x), (xi), (xii) e (xiii). As funções $+$ e \cdot são ditas, respectivamente, operação soma de vetores e operação multiplicação por escalar. Dizemos que V com estas operações é um **espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K}** . \diamond*

Voltando ao caso do espaço vetorial real \mathbb{R}^2 , vemos que todo vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito de forma única como $a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1)$. Dizemos então que o conjunto $\{(1, 0), (0, 1)\}$ é uma base para este espaço vetorial. Existem infinitas bases para \mathbb{R}^2 , um outro exemplo pode ser o conjunto $\{(1, 1), (0, 1)\}$, em que todo vetor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ pode ser escrito de forma única como $a \cdot (1, 1) + (b - a) \cdot (0, 1)$.

Em geral, uma **base** de um espaço vetorial V sobre um corpo \mathbb{K} é um conjunto de vetores tal que, a partir dele, todo vetor do espaço pode ser escrito de forma única. A propriedade de unicidade de escrita é equivalente ao fato de que a única combinação dos vetores da base que resulta no vetor nulo é a combinação cujos escalares que acompanham os vetores são todos iguais a zero. Formalmente, se $\{v_i\}_{i \in I}$ é uma base para V e $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subset \mathbb{K}$, com I um conjunto de índices, vale que:

$$\left(\sum_{i \in I} \alpha_i v_i = 0 \right) \Rightarrow (\alpha_i = 0 \text{ para cada } i \in I).$$

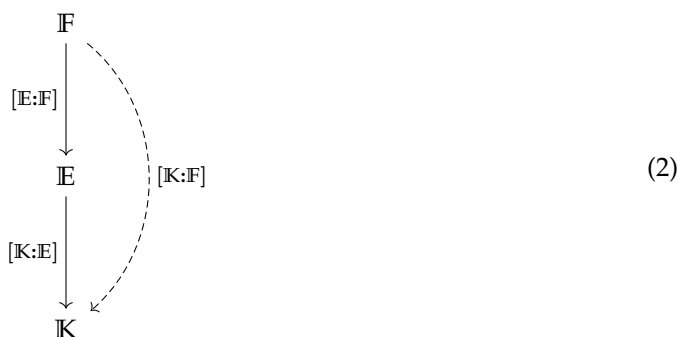
Todo espaço vetorial possui uma base, que pode ter um número de elementos finito ou não. Quando um espaço vetorial V sobre um corpo \mathbb{K} admite uma base com $n \in \mathbb{N}$ elementos, temos que todas as outras bases deste mesmo espaço vetorial também possuem n elementos. Este número é dito a **dimensão** do espaço vetorial V sobre o corpo \mathbb{K} . Por exemplo, a dimensão de \mathbb{R}^2 é dois, que é o número de elementos da base $\{(1, 0), (0, 1)\}$.

Vamos então estabelecer um diálogo entre as noções de extensão de corpos e de espaços vetoriais. Seja $\mathbb{K} : \mathbb{F}$ uma extensão de corpos. O corpo \mathbb{K} é um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{F} com a operação soma de vetores sendo a operação soma do corpo \mathbb{K} e com a operação produto por escalares sendo a operação multiplicação do corpo \mathbb{K} restrita ao conjunto $\mathbb{F} \times \mathbb{K}$. Daí, a noção de dimensão de um espaço vetorial que apresentamos no parágrafo precedente permite definir a seguir o conceito de grau de uma extensão de corpos.

Definição 3.5 (Grau de uma extensão). *Seja $\mathbb{K} : \mathbb{F}$ uma extensão de um corpo \mathbb{F} . Dizemos que o **grau da extensão** $\mathbb{K} : \mathbb{F}$, denotado por $[\mathbb{K} : \mathbb{F}]$, é a dimensão de \mathbb{K} como espaço vetorial sobre \mathbb{F} . \diamond*

Exemplo 3.3 (O caso importante de $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha})$). *O corpo $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) := \{a + b\sqrt{\alpha} : a, b \in \mathbb{Q}\}$, com α um número inteiro que não é divisível por um número primo ao quadrado, pode ser visto como um espaço vetorial sobre \mathbb{Q} . Um exemplo de base é o conjunto $\{1, \sqrt{\alpha}\}$. Logo, $[\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) : \mathbb{Q}] = 2$. \diamond*

A seguir vamos apresentar o principal resultado que utilizaremos para demonstrar que alguns polígonos são construtíveis e que outros não o são. Para os leitores mais experientes fornecemos uma demonstração que pode ser facilmente seguida. Entretanto, esta prova não é necessária para o entendimento do restante do texto e, por isso, basta termos em mente o enunciado do teorema. O Diagrama (2) esquematiza a ideia essencial do resultado em questão que consiste em passar de uma extensão de uma extensão de corpos para uma única extensão de corpos. Além disso, se a dimensão das extensões iniciais forem finitas, então teremos uma fórmula para calcular o grau de uma extensão de uma extensão de corpos.



Teorema 3.1 (Lei da Torre). *Se \mathbb{K} é uma extensão de um corpo \mathbb{E} e \mathbb{E} é uma extensão de um corpo \mathbb{F} , então \mathbb{K} é um extensão de \mathbb{F} . Além disso, se $[\mathbb{K} : \mathbb{E}]$ e $[\mathbb{E} : \mathbb{F}]$ são finitos, então $[\mathbb{K} : \mathbb{F}]$ também é finito e vale $[\mathbb{K} : \mathbb{F}] = [\mathbb{K} : \mathbb{E}][\mathbb{E} : \mathbb{F}]$.*

Demonstração. A primeira parte do enunciado segue diretamente da Definição 3.2. Seja $\{v_j\}_{j=1}^n$ uma base para o espaço vetorial \mathbb{E} sobre o corpo \mathbb{F} e seja $\{w_i\}_{i=1}^m$ uma base para o espaço vetorial \mathbb{K} sobre o corpo \mathbb{E} . Todo $w \in \mathbb{K}$ se escreve unicamente como:

$$w = \sum_{i=1}^m \beta_i w_i,$$

com $\beta_i \in \mathbb{E}$ para todo $1 \leq i \leq m$. Da mesma forma, cada β_i se escreve como $\beta_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j$ com

$\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$. Portanto:

$$w = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} v_j \right) w_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (v_j w_i).$$

Ou seja, todos os elementos de \mathbb{K} se escrevem a partir dos elementos do conjunto $\mathcal{B} = \{v_j w_i\}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Vejamos agora que esta forma de escrever os elementos de \mathbb{K} é única. Como comentado acima, isto é equivalente a mostrar que toda combinação nula de elementos de \mathcal{B} tem seus coeficientes todos nulos. Seja:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} (v_j w_i) = 0,$$

com $\gamma_{ij} \in \mathbb{F}$ para todos $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. O coeficiente que multiplica w_i pertence a \mathbb{E} . Como $\{w_i\}_{i=1}^m$ é uma base para o espaço vetorial \mathbb{K} sobre o corpo \mathbb{E} , necessariamente precisamos ter que $\sum_{j=1}^n \gamma_{ij} v_j = 0$. Mas com isso, uma vez que $\{v_j\}_{j=1}^n$ é uma base para o espaço vetorial \mathbb{E} sobre o corpo \mathbb{F} , cada $\gamma_{ij} = 0$. Portanto, \mathcal{B} é uma base para o espaço vetorial \mathbb{K} sobre o corpo \mathbb{F} . Sendo $[\mathbb{K} : \mathbb{E}] = m$ e $[\mathbb{E} : \mathbb{F}] = n$, vale $[\mathbb{K} : \mathbb{F}] = [\mathbb{K} : \mathbb{E}][\mathbb{E} : \mathbb{F}]$. \square

4. POLÍGONOS REGULARES CONSTRUTÍVEIS

Os métodos de Descartes serão úteis agora, bem como o fato de que operar números construtíveis com respeito à soma, à multiplicação, à diferença e à divisão produz ainda números construtíveis. Em outras palavras, como o conjunto dos números construtíveis \mathcal{A} é um subcorpo de \mathbb{R} com as operações usuais e, como todo número racional é construtível, temos a extensão $\mathcal{A} : \mathbb{Q}$. Portanto, podemos estabelecer uma ligação entre as construções geométricas com régua e compasso, os números construtíveis e as extensões de corpos. Vamos entender então as regras que estabelecemos na Introdução para construção de objetos do ponto de vista algébrico. Sendo a, b e c números construtíveis:

- uma reta é um conjunto de pontos que obedece a uma equação do tipo $ax + by = c$;
- uma circunferência é um conjunto de pontos que verifica a uma equação do tipo $(x - a)^2 + (y - b)^2 = c^2$.

Podemos obter números construtíveis através de intersecções de duas retas, o que algebricamente equivale a resolver um sistema linear, ou através de intersecções de uma reta com uma circunferência, ou ainda, através de intersecções de duas circunferências, sendo estas algebricamente equivalentes a resolver sistemas não-lineares. Estes sistemas são redutíveis a equações do segundo

grau que, por sua vez, envolvem raízes quadradas de números racionais. Devido ao método de Descartes, estas raízes também são construtíveis. Desta forma, os números construtíveis são obtidos através de finitas operações de soma e multiplicação entre números racionais combinadas com extração de raízes quadradas de números racionais positivos. Na linguagem das extensões de corpos, estamos tomando seguidas extensões de extensões do corpo dos números racionais, cada uma da forma $\mathbb{K}(\sqrt{\alpha})$ para algum número construtível α . Assim sendo, o Teorema 4.1 estabelece uma conexão entre as extensões de corpos e as construções geométricas com régua e compasso, completando a ponte mencionada entre as construções geométricas com régua e compasso, os números construtíveis e as extensões de corpos. Além disso, este teorema nos permite estudar a construtibilidade de alguns entes geométricos, como veremos a seguir.

Teorema 4.1. *Se α é construtível, então $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 2^n$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Seja α um número construtível. Começando com o corpo $\mathbb{K}_0 = \mathbb{Q}$, podemos encontrar n números reais construtíveis $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de forma que as extensões $\mathbb{K}_j = \mathbb{K}_{j-1}(\sqrt{\alpha_{j-1}})$, com $1 \leq j \leq n$, são tais que:

$$\mathbb{K}_0 \subset \mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}_2 \subset \dots \subset \mathbb{K}_{n-1} \subset \mathbb{K}_n \subset \mathbb{R}$$

e que $\alpha \in \mathbb{K}_n$. O corpo \mathbb{K}_n é uma extensão de \mathbb{Q} e, como $\alpha \in \mathbb{K}_n$, temos que \mathbb{K}_n é extensão de $\mathbb{Q}(\alpha)$. Cada extensão $\mathbb{K}_j : \mathbb{K}_{j-1}$ tem grau dois e, por isso, devido ao Teorema 3.1:

$$[\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}] = \prod_{j=1}^n [\mathbb{K}_j : \mathbb{K}_{j-1}] = 2^n.$$

Agora, como $[\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}(\alpha)] = 1$ porque $\alpha \in \mathbb{K}_n$ e $\alpha \in \mathbb{Q}(\alpha)$, o Teorema 3.1 garante que:

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}(\alpha)][\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{K}_n : \mathbb{Q}] = 2^n. \quad \square$$

Vejamos agora como usar este resultado para decidir sobre a construtibilidade de polígonos regulares.

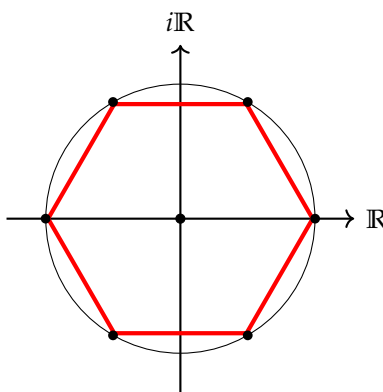


Figura 4.1: Raízes sextas da unidade.

Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Dizemos que as **raízes n -ésimas da unidade** são as soluções da equação $z^n - 1 = 0$. Denotamos por U_n o conjunto das n -ésimas raízes da unidade. Geometricamente, como se pode ver na Figura 4.1, as n -ésimas raízes da unidade são vértices do polígono regular de n lados inscrito na circunferência unitária.

Consideramos o polinômio $p(z) = z^n - 1$. Temos que 1 sempre é raiz de $p(z)$ e, quando n é um número natural par, -1 também é uma raiz. Mais que isso, estas são as únicas possíveis raízes reais puras para $p(z)$. O *Teorema Fundamental da Álgebra* garante que:

$$p(z) = \prod_{j=1}^n p_j(z)$$

com cada p_j sendo um polinômio de grau um com coeficientes complexos na variável z . Sabemos que a raiz γ_j do fator p_j é um elemento de U_n . Logo, podemos concluir, analisando a raiz de cada um destes fatores através do grau da extensão $\mathbb{Q}(\gamma_j)$, se cada vértice do polígono regular é ou não construtível. Se pelo menos um vértice não for construtível teremos a certeza de que o polígono em questão não admitirá construção com régua e compasso. A fim de entendermos melhor o conteúdo deste parágrafo, vamos mostrar no Exemplo 4.1 que o heptágono regular não é construtível.

Exemplo 4.1. *Sejam $p(z) = z^7 - 1$ e $q(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$. Temos que $p(z) = (z - 1)q(z)$. O polinômio $q(z)$ é irredutível sobre \mathbb{Q} . Seja γ uma raiz de $q(z)$. Temos que $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}] = 6$, que não é uma potência de dois. Devido ao Teorema 4.1, γ não é um número construtível. Segue daí que o heptágono regular não admite construção com régua e compasso. \diamond*

Sejam agora $p(z) = z^{17} - 1$ e $q(z) = z^{16} + z^{15} + \dots + z + 1$. Temos que $p(z) = (z - 1)q(z)$ como antes. O polinômio $q(z)$ também é irredutível sobre \mathbb{Q} . Seja γ uma raiz de $q(z)$. Neste caso, temos que $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}] = 16$, que é uma potência de dois. Porém, como a recíproca do Teorema 4.1 não é necessariamente verdadeira, ainda não podemos decidir se o heptadecágono regular admite ou não construção com régua e compasso.



Figura 4.2: Carl Friedrich Gauss, por Christian Albrecht Jensen.

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) foi o responsável por mostrar que o heptadecágono regular é construtível, fato que ficou imortalizado em sua lápide em Göttingen, Alemanha, que possui tal polígono gravado. Mais que isso, na obra *Disquisitiones Arithmeticae* de 1798, Gauss formulou uma condição necessária e suficiente para que polígonos regulares de n lados fossem construtíveis.

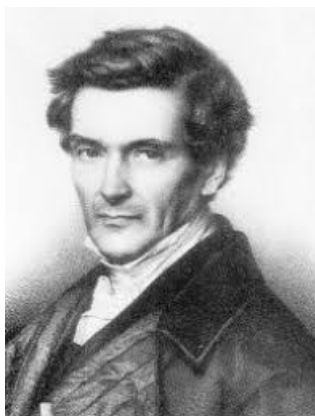


Figura 4.3: Pierre Laurent Wantzel, por autor desconhecido.

Anos mais tarde, **Pierre Laurent Wantzel** (1814-1848) apresentou uma prova para a afirmação de Gauss, que é o resultado logo abaixo. Wantzel foi um dos pioneiros mostrando a impossibilidade de certas construções geométricas em seu trabalho *Recherches sur les moyens de reconnaître si un Problème de Géométrie peut se résoudre avec la règle et le compas*.

Teorema 4.2 (Teorema de Gauss-Wantzel). *Seja $n \in \mathbb{N}$ com $n > 2$. O n -ágono regular é construtível com régua e compasso se, e somente se:*

$$n = 2^r \cdot \prod_{j=1}^k p_j,$$

em que $r, k \in \mathbb{N}$ e os p_j 's são primos distintos de Fermat. Ou seja, $p_j = 2^{2^{r_j}} + 1$ com $r_j \in \mathbb{N}$. □

A demonstração do resultado anterior utiliza métodos mais avançados que envolvem questões técnicas sobre as extensões de corpos e que compõem uma subárea da Matemática chamada de *Teoria de Galois*. Por conta disso não disporemos esta demonstração aqui. Entretanto, vamos discutir um pouco mais sobre as consequências práticas deste teorema tão fascinante. Para isso, falaremos dos primos de Fermat.

Pierre de Fermat (1601-1665) foi um amante da *Teoria dos Números* e estudou, entre muitas outras coisas, os números primos. Na busca por uma fórmula geral para estes, Fermat se deparou com os números da forma $2^{2^r} + 1$, com $r \in \mathbb{N}$. Substituindo o parâmetro r por 0, 1, 2, 3 e 4 ele obteve, respectivamente, os números 3, 5, 17, 257 e 65537 que são números primos. Fermat então conjecturou que todos os números desta forma eram primos. **Leonard Euler** (1707-1783) desmentiu a afirmação mostrando que para $r = 5$ o número $2^{2^5} + 1$ é um múltiplo de 641. O mais curioso é que até o dia de hoje não se conhece nenhum outro primo da forma em questão que não seja um dos cinco acima citados.



Figura 4.4: *Pierre de Fermat, por autor desconhecido.*

A partir dos comentários do parágrafo anterior, a lista mais completa atualmente dos valores de $n > 2$ para os quais o polígono regular de n lados é construtível é gerada por:

$$2^r \cdot 3^{a_1} \cdot 5^{a_2} \cdot 17^{a_3} \cdot 257^{a_4} \cdot 65537^{a_5},$$

em que $r \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \{0, 1\}$ para todo $1 \leq i \leq 5$. Explicitamente, alguns dos valores que compõem esta lista são:

3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272, 320, 340, 384, 408, 480, 510, 512, 514, 544, 640, 680, 768, 771, 816, 960, 1020, 1024, 1028, 1088, 1280, 1285, 1360, 1536, 1542, 1632, 1920, 2040, 2048, ...

Analogamente, alguns valores de n para os quais o polígono regular de n lados não é construtível são:

7, 9, 11, 13, 14, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 31, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 49, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 63, 65, 66, 67, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 81, 82, 83, 84, 86, 87, 88, 89, 90, 91, ...

Como vimos neste texto, temos uma construção explícita para o triângulo equilátero e para o pentágono regular. Além disso, Gauss construiu o heptadecágono e viveu grande parte de sua vida orgulhoso disso. O polígono regular de 257 lados foi efetivamente construído em 1832 por **Friedrich Julius Righelot** (1808-1875) e o polígono regular de 65537 lados foi construído em 1894 por **Johann Gustav Hermes** (1846-1912), que levou dez anos para completar sua construção que está descrita em um manual de 200 páginas. Portanto, cada um dos elementos da sequência que mencionamos acima é explicitamente construtível. Na verdade precisamos somente saber como construir explicitamente polígonos regulares com número de lados:

$$n = 3^{a_1} \cdot 5^{a_2} \cdot 17^{a_3} \cdot 257^{a_4} \cdot 65537^{a_5}$$

com $a_i \in \{0, 1\}$ para todo $1 \leq i \leq 5$, porque qualquer polígono regular cujo número de lados seja $n \cdot 2^k$ se obtém construindo o polígono regular de n lados e bissectando seus ângulos internos k

vezes, como nos diz o *Lema de Bisseção* (Teorema 1.1). O *Lema da Composição* (Teorema 1.2) nos diz como proceder. De fato, por exemplo, se quisermos construir o polígono regular com $3 \cdot 5 = 15$ lados, então precisaremos escrever o $\text{mdc}(3, 5) = 1$ como $2 \cdot 3 - 1 \cdot 5$. Daí, sabemos que o ângulo interno deste polígono é $\frac{2\pi}{15} = 2 \cdot \frac{2\pi}{5} - 1 \cdot \frac{2\pi}{3}$ por causa da Equação (1). Mas esta diferença de ângulos é construtível com régua e compasso e, por isso, o polígono regular de 15 lados é construtível. No caso em que queremos construir o polígono regular de $3 \cdot 5 \cdot 257 = 3855$ lados procedemos da mesma maneira. Ou seja, escrevemos $\text{mdc}(3 \cdot 5, 257) = 1$ como $-137 \cdot (3 \cdot 5) + 8 \cdot 257$ e usamos a Equação (1) para construir uma diferença de ângulos que sabemos construir com régua e compasso. Analogamente, todos os polígonos da forma dita podem ser explicitamente construídos.

5. O HEPTÁGONO REGULAR

A única construção grega do heptágono regular que sobreviveu ao tempo e chegou até nós foi preservada numa tradução árabe do nono século de nossa era da obra *Livro de Construção do Círculo Dividido em Sete Partes Iguais* atribuída a **Arquimedes de Siracusa** (287-212).

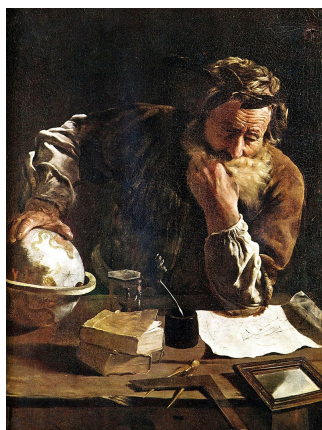


Figura 5.1: *Arquimedes de Siracusa*, por Domenico Fetti.

Nos parágrafos a seguir descrevemos o método de Arquimedes, contido na referência citada, para dividir o círculo em sete partes iguais. Consequentemente, obteremos um heptágono regular de forma exata, entretanto sem régua e compasso ainda. É importante notar desde já que esta não se trata de uma construção por régua e compasso da forma como entendemos. No momento exato explicaremos o porquê disto.

Teorema 5.1. *Seja AB um segmento de reta com comprimento um. Existe um ponto K no segmento AB e existe um ponto Z na extensão retilínea de AB tais que $KB = ZA^2$ e que $ZK \cdot AK = KB^2$.*

Demonstração. Seja $ABDG$ um quadrado de lado um e seja BG uma sua diagonal. Estendamos o segmento AB para a direita como na Figura 5.2. Seja DZ um segmento que intersecte BG em T , AG em H e a extensão de AB em Z de forma que os triângulos $\triangle ZAH$ e $\triangle DTG$ tenham mesma área.

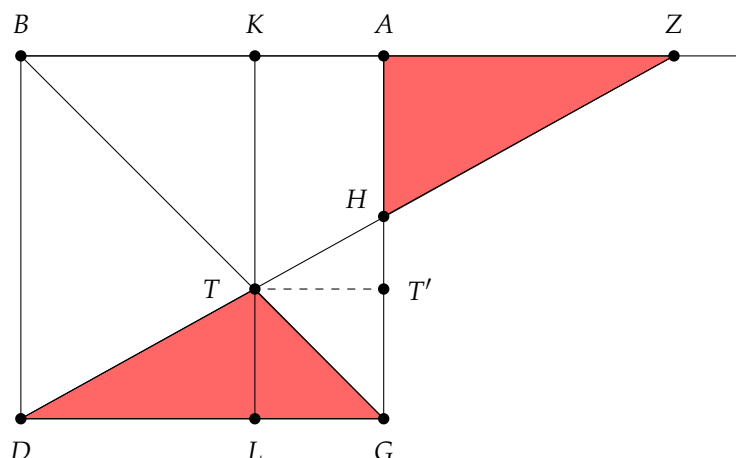


Figura 5.2: Construção dos pontos K e Z.

Vejamos que este segmento resolve nosso problema. Construimos KL perpendicular ao segmento AB . Desta forma, os pontos K e Z são tais que $KB = ZA^2$ e que $ZK \cdot AK = KB^2$. De fato, $GD \cdot TL = AH \cdot ZA$ dado que o triângulo $\triangle DLTG$ tem mesma área que o triângulo $\triangle ZAH$. Portanto:

$$\frac{AB}{ZA} = \frac{GD}{ZA} = \frac{AH}{TL}.$$

Mas como o triângulo $\triangle ZAH$ é semelhante ao triângulo $\triangle DLT$, tem-se que:

$$\frac{AH}{TL} = \frac{ZA}{LD} = \frac{ZA}{KB}.$$

Com isso:

$$\frac{AB}{ZA} = \frac{1}{ZA} = \frac{ZA}{KB}$$

e, pois, $KB = ZA^2$. Além disso, $AK = GL = TL$ e $LD = KB = KT$. Portanto:

$$\frac{AK}{KB} = \frac{TL}{KT}.$$

Uma vez que o triângulo $\triangle ZKT$ é semelhante ao triângulo $\triangle DLT$, tem-se também:

$$\frac{TL}{KT} = \frac{LD}{ZK} = \frac{KB}{ZK}.$$

Logo $AK/KB = KB/ZK$ e, portanto, $ZK \cdot AK = KB^2$. □

A técnica que se deve usar para fabricar o segmento DZ acima chama-se **Construção Neusis**. Este método consiste em colocar através de tentativa e erro um segmento de reta de tamanho fixado entre duas curvas C_1 e C_2 a partir de um ponto também fixado, chamado de *polo*. Tal procedimento não está contemplado pelas regras de régua e compasso originais. Entretanto, se adicionarmos a Construção Neusis às regras do jogo, então algumas construções tornam-se possíveis como, por exemplo, a construção do heptágono regular.

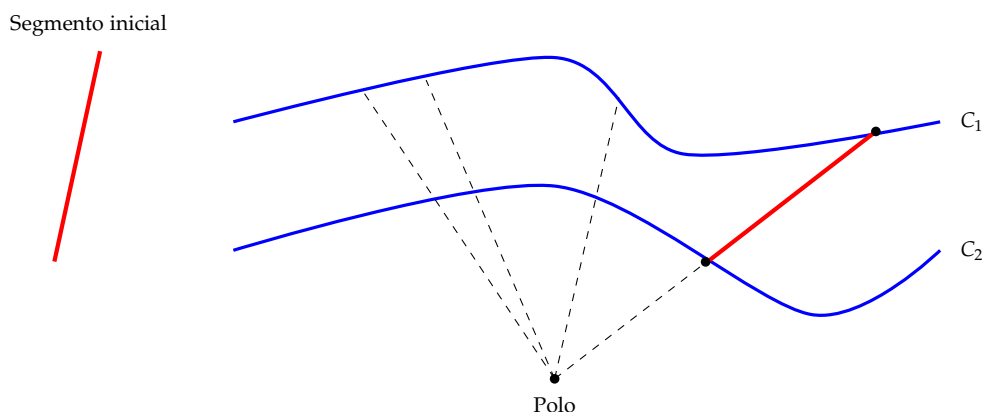


Figura 5.3: Elementos para a Construção Neusis: curvas C_1 e C_2 , polo e segmento inicial. Conforme esquematizado, a partir de raios que se originam no polo procura-se através de tentativa e erro encaixar o segmento inicial entre as curvas C_1 e C_2 .

Veremos até o fim desta seção a prova da veracidade dessas duas afirmações que foram feitas no parágrafo anterior. Ou seja, mostraremos que o segmento DZ não é construtível com régua e compasso e, portanto, que a Construção Neusis não está contemplada pelas regras de régua e compasso originais e, depois, mostraremos que admitindo-a podemos construir o heptágono regular com régua e compasso e, pois, que esta técnica amplia o espectro de figuras construtíveis que possuímos.

- **(DZ não é construtível com régua e compasso).** Denotamos por α e por β os comprimentos dos segmentos KB e ZA , respectivamente. Temos que $(KB = ZA^2) \Rightarrow (\alpha = \beta^2)$. Os ângulos $\sphericalangle TDL$ e $\sphericalangle KZH$ são iguais, por paralelismo. Desta forma:

$$\tan(\sphericalangle TDL) = \tan(\sphericalangle KZH) \Rightarrow \frac{1 - \alpha}{\alpha} = \frac{\alpha}{1 - \alpha + \beta}.$$

Daí, $\alpha^2 = (1 - \alpha)(1 - \alpha + \beta) \Leftrightarrow \beta(1 - \alpha) = 2\alpha - 1 \Rightarrow \alpha(1 - \alpha)^2 = (2\alpha - 1)^2 \Leftrightarrow \alpha^3 - 6\alpha^2 + 5\alpha - 1 = 0$. Fazendo a substituição $\alpha = \frac{1}{1 + \eta}$ esta última equação se escreve como $\eta^3 - 2\eta^2 - \eta + 1 = 0$.

0. Fazendo agora a substituição $\eta = \frac{1}{\rho}$ esta última equação se escreve como:

$$\rho^3 - \rho^2 - 2\rho + 1 = 0. \quad (3)$$

Vamos analisar então a construtibilidade de ρ . Seja $q(z) = z^3 - z^2 - 2z + 1$, $z \in \mathbb{C}$. Este polinômio é irredutível sobre \mathbb{Q} e, portanto, sua raiz ρ é tal que $[\mathbb{Q}(\rho) : \mathbb{Q}] = 3$. Como este valor não é uma potência de dois, o Teorema 4.1 garante que ρ não é um número construtível. Consequentemente, η e α não são números construtíveis. Com isso concluímos que DZ não pode ser determinado através uma construção clássica com régua e compasso, pois caso contrário o segmento KB seria construtível. \diamond

- **(Com a Construção Neusis é possível obter o heptágono regular)**. Vamos dividir o círculo em sete partes iguais e, por consequência, obter um heptágono regular. Nossa estratégia consiste em buscar uma forma de desenhar o ângulo central $\frac{2\pi}{7}$ do heptágono regular. Para isso, notamos que uma raiz da Equação (3) é $\rho = 2 \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$ e fixamos este valor de ρ daqui em diante.

Sejam m a mediatriz do segmento BA e $C(A, \beta)$ o círculo de centro A e raio β . Chamamos de A_1 um dos pontos de intersecção de m com $C(A, \beta)$, como na Figura 5.4. O triângulo ΔBAA_1 desta figura é isósceles.

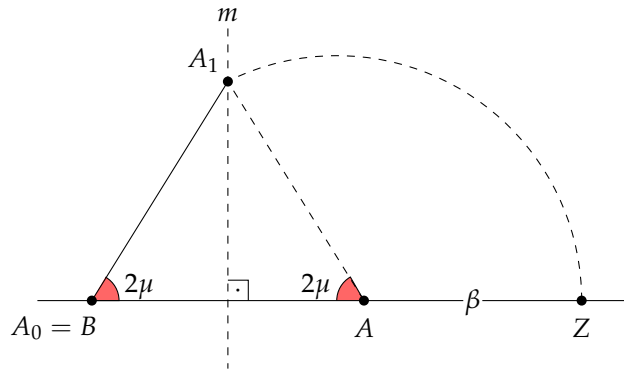


Figura 5.4: Determinação do ponto A_1 .

Seja $2\mu = \sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle ABA_1$. Como $\eta = \frac{1}{\rho}$, então $\alpha = \frac{1}{1+\eta} = \frac{\rho}{\rho+1}$. A Equação (3) nos diz que $\frac{\rho}{\rho+1} = 2\rho^2 - \rho^3 = (\rho-1)^2$. Dessa forma, $\alpha = (\rho-1)^2$. Dado que $\alpha = \beta^2$, segue que $\beta = \rho - 1$. Calculando o cosseno do ângulo 2μ obtemos $\cos(2\mu) = \frac{1}{2\beta}$. Além disso, a Equação (3) se escreve como $\rho^2 - 2 = \frac{1}{\rho-1}$. Portanto,

$$\rho^2 - 2 = 2 \cos(2\mu) = 4 \cos^2(\mu) - 2 \Rightarrow \rho = 2 \cos(\mu).$$

Ou seja, para $\rho = 2 \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$, temos que $\cos(\mu) = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right)$. Mas então, $\mu = \frac{\pi}{7} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Como o ângulo μ é agudo, temos que $k = 0$. Logo $\mu = \frac{\pi}{7}$.

Seja r a reta passando por A_1 paralela à reta suporte de ZA e seja s a reta passando por Z paralela à reta suporte de AA_1 . Chamamos o ponto de intersecção destas duas retas de A_2 . Na Figura 5.5 temos então o losango AA_1A_2Z . Daqui em diante chamamos os pontos B e Z , respectivamente, de A_0 e A_3 . Por paralelismo, $\sphericalangle A_0AA_1 = \sphericalangle AA_3A_2 = 2\mu$. Portanto, como o triângulo $\Delta A_1A_3A_2$ é isósceles e o ângulo $\sphericalangle A_2A_3A_1 = \mu$, pois A_1A_3 é a diagonal do losango que bissecta este ângulo, temos que o ângulo $\sphericalangle A_3A_2A_1$ mede $\pi - 2\mu = 5\mu$. Com isso $\sphericalangle AA_2A_3 = \sphericalangle A_2AA_3 = \frac{5\mu}{2}$ pois o triângulo ΔA_2AA_3 é isósceles.

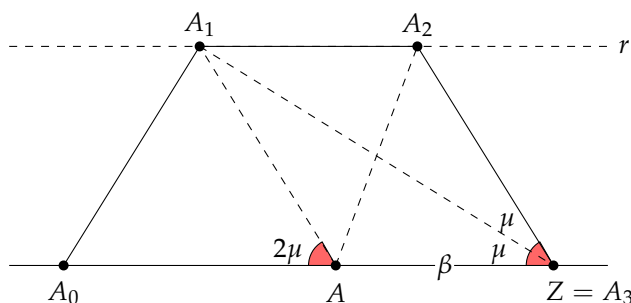


Figura 5.5: Determinação do ponto A_2 .

Traçamos então o círculo determinado pelos pontos A_1, A_2 e A_3 . Este terá centro O como pode ser visto na Figura 5.6. Como OA_3 e OA_2 são raios, o triângulo ΔA_2OA_3 é isósceles e, com isso, os ângulos $\sphericalangle OA_2A_3$ e $\sphericalangle A_2A_3O$ são congruentes. Obtemos então o ângulo central procurado:

$$\sphericalangle A_2OA_3 = \pi - 2 \cdot \left(\frac{5\mu}{2} \right) = \frac{2\pi}{7}.$$

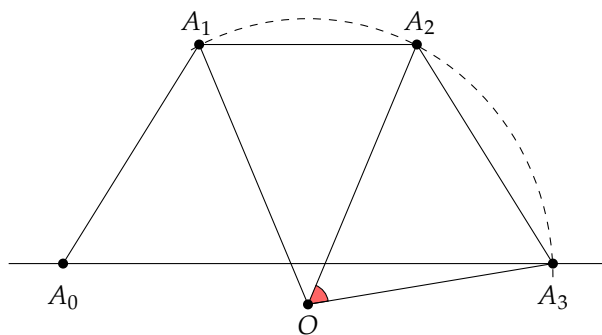


Figura 5.6: Ângulo $\sphericalangle A_2OA_3$ de medida $\frac{2\pi}{7}$.

Terminaremos mostrando que os pontos A_0, A_1, A_2 e A_3 são quatro vértices de um heptágono regular. Já temos que o ângulo $\sphericalangle A_1OA_2$ vale $\frac{2\pi}{7}$ pois os triângulos ΔA_2OA_3 e ΔA_1OA_2 são congruentes. precisamos mostrar que o ponto A_0 pertence ao círculo determinado por A_1, A_2 e A_3 e, para isso, mostraremos que o segmento OA_0 da Figura 5.7 é um raio. O ângulo $\sphericalangle A_3AO$ mede $\pi - \frac{5\mu}{2} = \frac{9\mu}{2}$. Os ângulos $\sphericalangle GAO$ e $\sphericalangle A_2AA_3$ são opostos pelo vértice, logo são congruentes. Calculando então o ângulo $\sphericalangle AGO$ temos que $\sphericalangle AGO = \pi - 2\mu - \frac{5\mu}{2} = \frac{5\mu}{2}$, portanto o triângulo ΔOGA é isósceles e $OG = OA$.

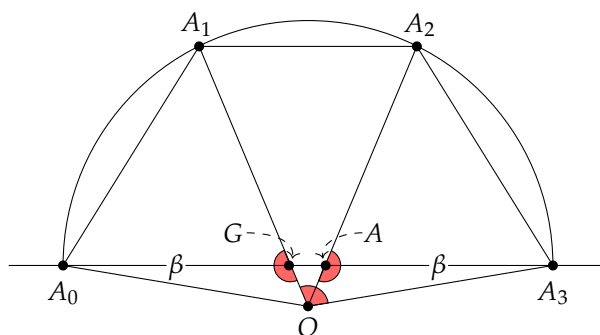


Figura 5.7: Quatro vértices do heptágono regular.

Podemos determinar o ângulo $\sphericalangle OGA_0$, que mede $\pi - \frac{5\mu}{2} = \frac{9\mu}{2}$. Os ângulos $\sphericalangle A_0GA_1$ e $\sphericalangle OGA$ são opostos pelo vértice, logo tem mesma medida. Como $\sphericalangle A_0A_1G$ mede 2μ temos que o ângulo $\sphericalangle A_0A_1G = \pi - \frac{5\mu}{2} = \frac{5\mu}{2}$. Então ΔA_0A_1G é isóceles e $A_0G = A_0A_1$. Do losango da Figura 5.5, $A_0A_1 = AA_3$, logo $A_0G = AA_3$. Dessa forma $A_0G = AA_3$, $\sphericalangle OGA_0 = \sphericalangle A_3AO$ e $OG = OA$. Pelo caso de congruência lado-ângulo-lado os triângulos ΔA_0GO e ΔA_3AO são congruentes. Portanto, o segmento OA_0 mede o mesmo que o raio OA_3 . Por isso também o ângulo $\sphericalangle A_1OA_0$ mede $\frac{2\pi}{7}$. Agora com o compasso marcamos os outros vértices nesse círculo e obtemos um heptágono regular. \diamond

A Construção Neusis, por sua impossibilidade de determinação exata com as técnicas clássicas de régua e compasso, sofreu uma certa rejeição na História. Possivelmente, segundo o famoso especialista em *Matemática Grega Antiga* **Sir Thomas Little Heath** (1861-1940), a primeira delas se deu através de **Oenopides** (≈ 440 a.C.). Depois dele, **Hipócrates de Chios** (≈ 430 a.C.) disseminou a ideia de que a Construção Neusis deveria ser evitada sempre que possível. Cem anos depois, **Euclides**, na obra *Os Elementos*, também evitou o uso desta possibilidade. Por fim, devido ao idealismo de **Platão**, este tipo de construção se tornou associada ao “mundo terreno e mecânico”, perdendo *status* no meio intelectual. O fato interessante é que se acrescentarmos a Construção Neusis como uma regra elementar, então alguns novos valores de n para os quais o polígono regular de n lados é construtível são:

7, 9, 11, 13, 18, 19, 21, 22, 26, 27, 28, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 42, 44, 45, 52, 54, 55, 56, 57,
63, 65, 66, 70, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 81, 84, 88, 90, 91, 95, 97, 99, 104, 105, 108, 109, 110,
111, 112, 114, 117, 119, 126, ...

Continuam existindo, entretanto, valores de n para os quais nem mesmo a Construção Neusis faz com que o polígono regular de n lados seja construtível com régua e compasso. Alguns desses valores são:

23, 29, 43, 46, 47, 49, 53, 58, 59, 67, 69, 71, 79, 83, 86, 87, 89, 92, 94, 98, 103, 106, 107,
113, 115, 116, 118, 121, 127, ...

Mais que isso, existem valores de n para os quais não se sabe se a Construção Neusis torna o polígono regular de n lados construtível com régua e compasso. Alguns desses valores são:

25, 31, 41, 50, 61, 62, 75, 82, 93, 100, 101, 122, 123, 124, 125, ...

REFERÊNCIAS

- [1] FRALEIGH, J. B.; *A first course in abstract algebra*. 7ª Edição, Pearson, (2002)
- [2] HUNGERFORD, Thomas W.; *Algebra*. Graduate Texts in Mathematics 73. Springer-Verlag New York, (1980).
- [3] NORR, Wilbur; *On Archimedes' Construction of the Regular Heptagon*. *Centaurus*, 32. 257 - 271, (2007).
- [4] acTutor History of Mathematics archives. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>. Acesso em 18 de Novembro de 2018.
- [5] UZUKI. Jeff; *A Brief History of Impossibility*. Brooklyn College, Brooklyn, New York, (2008).