A Admirável Demonstração Errada do Teorema das Quatro Cores

Luan Arjuna Fraga Ramires

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Universidade de São Paulo
luanarjuna@usp.br

1. Introdução

É muito comum encontrar pessoas que enaltecem a Matemática sobre as outras ciências devido à sua imutabilidade e exatidão. "Enquanto nas demais ciências não se tem certeza de nada, e novas teorias podem vir a substituir teorias antigas", te dirão essas pessoas, "na Matemática, o conhecimento apenas se acumula. Veja o Teorema de Pitágoras, por exemplo: foi demonstrado há mais de dois mil anos e continua a ser verdade hoje em dia". No entanto, a realidade é que, embora a Matemática seja, de fato, imutável e exata, os matemáticos não são e muitas vezes se enganam. Neste artigo, trataremos de um desses enganos: uma demonstração incorreta para o Teorema das Quatro Cores, que possui um erro tão sutil que foi capaz de enganar a comunidade científica da época por 11 anos.

2. O Teorema das Quatro Cores

O **Teorema das Quatro Cores** afirma que:

Teorema 1. *Não mais que quatro cores são necessárias para colorir as regiões de um mapa de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes.*

A primeira especulação desse fato é geralmente atribuída ao matemático inglês Francis Guthrie (1831-1899), a quem a conjectura teria ocorrido enquanto coloria um mapa da Inglaterra no ano de 1852. Francis teria compartilhado sua suposição com seu irmão, Frederick (1833-1886), que, por sua vez, a teria compartilhado com seu professor de matemática no University College, London, Augustus De Morgan[1] (1806-1871). De Morgan foi responsável pela primeira evidência escrita conhecida da conjectura: uma carta para seu amigo e professor de matemática no Trinity College, Dublin, Sir William Rowan Hamilton[2] (1805-1865). Infelizmente, Hamilton não demonstrou muito interesse pelo assunto.

De Morgan chegou a trocar mais algumas cartas envolvendo o fato e o mencionava em suas aulas. Ele também foi o primeiro a publicar o enunciado da conjectura, em 1860, na revista literária inglesa Athenaeum, incluindo ao final um comentário dizendo que o fato seria, desde sempre, de conhecimento dos cartógrafos responsáveis por colorir mapas. Contudo, não há qualquer indício que nos leve a crer nessa afirmação, já que nunca houve uma tendência por parte dos cartógrafos de reduzir o número de cores utilizadas na coloração de mapas.

[1] Responsável pela criação das Leis de Morgan e pela formalização do conceito de Indução Matemática, dentre outros.
[2] Responsável pela criação dos Quatérnios e pelo Teorema de Cayley-Hamilton, dentre outros.

Quase duas décadas de esquecimento mais tarde, em 13 de junho de 1878, um dos grandes nomes da matemática da época, Arthur Cayley[3] (1821-1895), questionou durante uma reunião da London Mathematical Society se alguma demonstração para a conjectura havia sido descoberta, e, recebendo uma resposta negativa, publicou, no ano seguinte, um artigo a seu respeito. Nesse artigo Cayley falou sobre a dificuldade de se encontrar uma demonstração para o fato e declarou que ele mesmo havia falhado em obtê-la. Essa declaração pode ter desencadeado interesse por parte da comunidade matemática, afinal, quem perderia a oportunidade de tentar demonstrar uma conjectura com um enunciado tão simples e de fácil entendimento e que, mesmo assim, desafiava um dos maiores matemáticos de seu tempo?

No mesmo ano, o advogado e matemático amador inglês Alfred Bray Kempe (1849-1922) publicou em um jornal de prestígio a sua famosa demonstração.

3. Formalizando alguns conceitos

Antes de nos aventurarmos pela demonstração incorreta de Kempe, algum formalismo com relação a até então Conjectura das Quatro Cores seria útil. Afinal para que possamos trabalhar com o problema de forma mais "matemática", definições mais "matemáticas" se fazem necessárias. A verdade é que é possível formalizar o conceito usual de mapa (usando topologia!), porém há uma alternativa muito mais simples: grafos. Perceba que, para o teorema em questão, não estamos interessados no formato das regiões, apenas em *quais são os países* e *qual faz fronteira com qual*, de modo que a utilização de grafos para representar nossos mapas é uma ideia que surge com bastante naturalidade.

Para garantir que estamos todos na mesma página:

Definição 1. Um *grafo* é um par ordenado $G = (V, E)$, onde V é um conjunto qualquer e E é uma relação sobre V. Os elementos de V são ditos *vértices* de G, e os pares de vértices que se relacionam de acordo com E são ditos *arestas*. Em geral, exigimos que um vértice não se relacione consigo mesmo.

Recorremos ao uso de grafos sempre que queremos estudar a estrutura de uma determinada relação sobre os objetos de um conjunto. Por exemplo, poderíamos utilizar um grafo para estudar as pessoas em uma reunião que se conhecem, as receitas em um livro de culinária que possuem ingredientes em comum ou as regiões de um mapa que são adjacentes.

Uma forma comum de representar grafos é utilizando pontos para representar os vértices e arcos ligando pares de pontos que se relacionam para representar as arestas. Essa representação (ou, mais precisamente, o conjunto de pontos e arcos) é chamada *imersão do grafo no plano*. Em geral, pode-se entender a imersão de um grafo no plano como uma forma (note que podem haver várias) de desenhá-lo em uma folha de papel. Por exemplo, eis uma imersão do grafo em que os vértices são os números de 3 a 20 e dois números se relacionam se um divide o outro:

[3] Responsável pela formalização do conceito de grupo e pelo Teorema de Cayley-Hamilton, dentre outros.

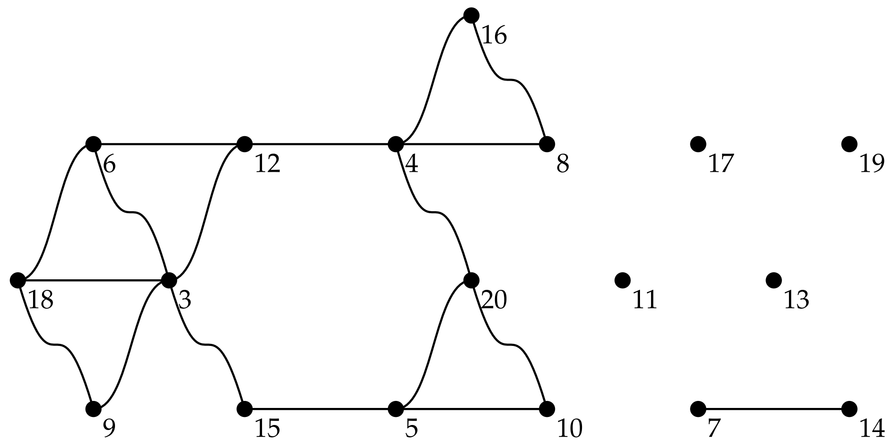


Figura 1

É claro que todo mapa pode ser representado através de um grafo em que os vértices são as regiões e as arestas são pares de regiões vizinhas. Eis um exemplo da representação de um mapa fazendo uso da imersão de um grafo no plano:

Figura 2

Dessa forma, o problema se torna colorir os vértices de um grafo de modo que vértices que se relacionam tenham cores distintas. Contudo, pode-se encontrar exemplos de grafos que necessitem de cinco ou mais cores de acordo com tais restrições:

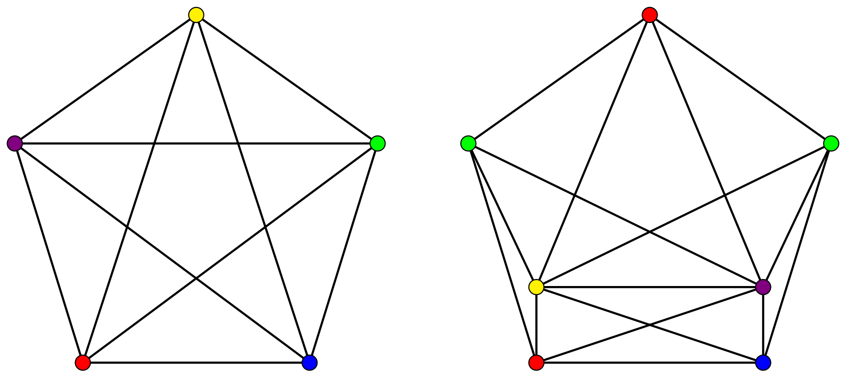
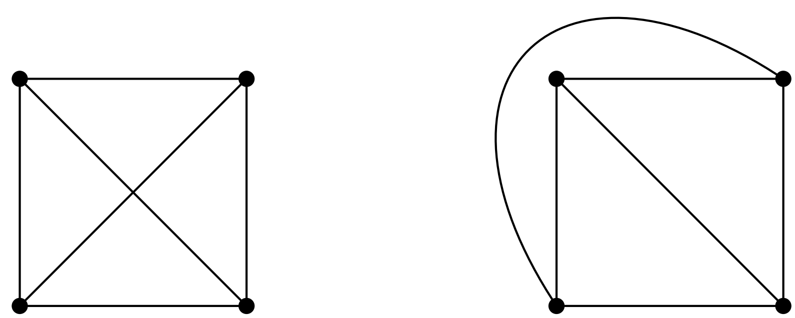


Figura 3

A grande questão é que esses grafos não representam mapa algum![4] Mas por quê? Qual característica os impede de representar um mapa? A resposta é simples: Todas as suas imersões possuem arestas que se cruzam, isto é, os grafos em questão não são *planares*.

Definição 2. Uma imersão ϕ de um grafo G é dita *plana* se os arcos de ϕ que representam as arestas de G não se cruzam.



Imersão não plana *Imersão plana*

Figura 4

Definição 3. Um grafo é dito *planar* se existe uma imersão sua que é plana.

De fato, se um grafo representa um mapa, esse grafo deverá ser planar. Também é verdade que, para todo grafo planar, existe um mapa que é representado por ele. Ambos esses fatos estão

[4]Para se convencer disso, tente construir um mapa a partir das imersões dadas. Como incentivo para colocar a mão na massa, saiba que exibir um tal mapa o tornaria mundialmente famoso como a pessoa que destruiu a teoria dos grafos! Você não vai deixar passar essa oportunidade, certo?

longe de ser triviais e suas demonstrações envolveriam formalizar o conceito de mapa (justamente o que estamos tentando evitar). Logo, elas não serão apresentadas neste artigo. Os próximos passos da demonstração contam com a sua fé.

Por fim, formalizamos o que seria uma *coloração* de um grafo:

Definição 4. Dado um grafo $G = (V, E)$ e um conjunto de cores X (geralmente representadas por números), uma *coloração* de G é uma função $c : V \to X$. Dizemos que tal coloração usa n cores se a imagem de c tem n elementos. Se para qualquer par de vértices u, v que se relacionam temos $c(u) \neq c(v)$, dizemos que a nossa coloração é *própria*.

Fazendo uso das definições de grafo planar e coloração, podemos reescrever o **Teorema 1** como se segue:

Teorema 2. *Não mais que quatro cores são necessárias para uma coloração própria de um grafo planar.*

Como já foi dito, será mais conveniente de se trabalhar com essa versão do teorema.

4. Glossário

A seguir estão mais algumas definições relacionadas a grafos que serão utilizadas no decorrer do artigo. Volte para esta sessão sempre que encontrar uma palavra estranha e não se recordar do seu significado.

Vértices vizinhos. Dois vértices de um grafo que se relacionam são ditos *vizinhos*.

Vizinhança e grau. A *vizinhança* de um vértice v de um grafo, denotado por $N(v)$ (do inglês *neighbourhood*), é o conjunto dos vizinhos de v. O *grau* de v, denotado por $deg(v)$ (do inglês *degree*), é o número de vizinhos de v, isto é, o tamanho de $N(v)$.

Caminho e ciclo. Um *caminho* em um grafo G é uma sequência $a_1, a_2, \cdots, a_n$ de vértices de G distintos dois a dois (exceto possivelmente por a_1 e a_n) tais que a_i e a_{i+1} são vizinhos para todo $i \in \{1, 2, ..., n-1\}$. Se $a_1 = a_n$, dizemos que tal caminho é um *ciclo*.

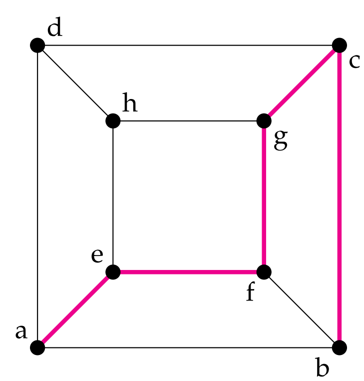


Figura 5: *a, e, f, g, c, b é um caminho no grafo acima.*

Grafo conexo. Um grafo é dito *conexo* se existe um caminho ligando quaisquer dois de seus vértices.

Subgrafo. Um *subgrafo* de um grafo G é um grafo formado por um subconjunto de vértices e um subconjunto de arestas de G.

Componente conexa. Uma *componente conexa* de um grafo G é um subgrafo conexo maximal de G, ou seja, um subgrafo conexo que não é subgrafo de outro subgrafo conexo.

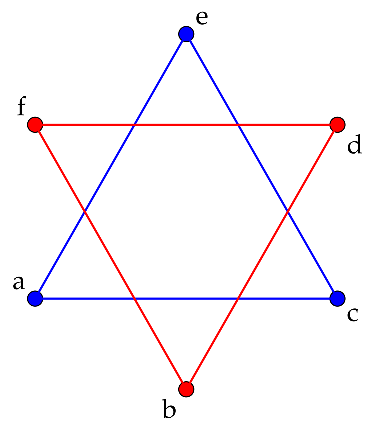


Figura 6: *O grafo acima possui duas componentes conexas, representadas em azul e vermelho.*

Subgrafo induzido. Dado um grafo $G = (V, E)$, o *subgrafo induzido* por um conjunto de vértices $W \subset V$ é o subgrafo $G[W] := (W, E|_W)$ de G, onde $E|_W$ é a relação E restrita ao conjunto W. Em palavras, $G[W]$ é o grafo G após a remoção dos vértices que não estão em W junto com as suas arestas incidentes.

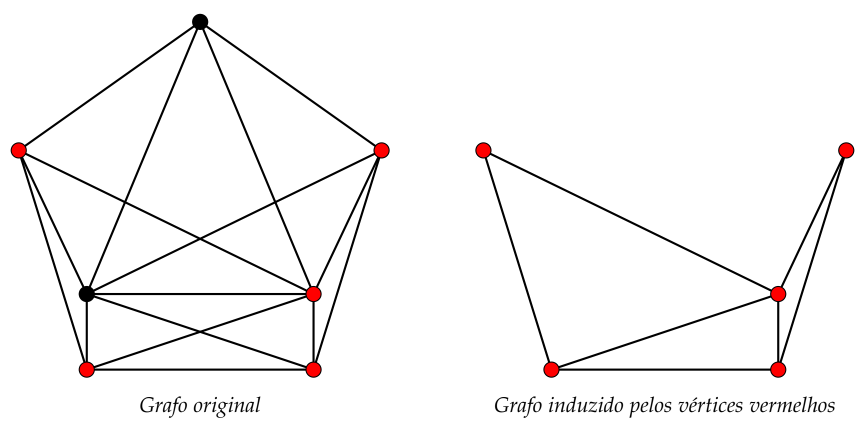


Figura 7

Dado um grafo $G = (V, E)$ e um vértice v de G, definimos o grafo $G - v$ como o subgrafo induzido por $V - \{v\}$.

Faces. As *faces* de uma imersão plana de um grafo são as regiões do plano cuja fronteira é formada pelos arcos da imersão.

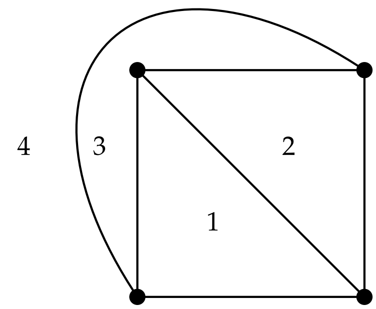


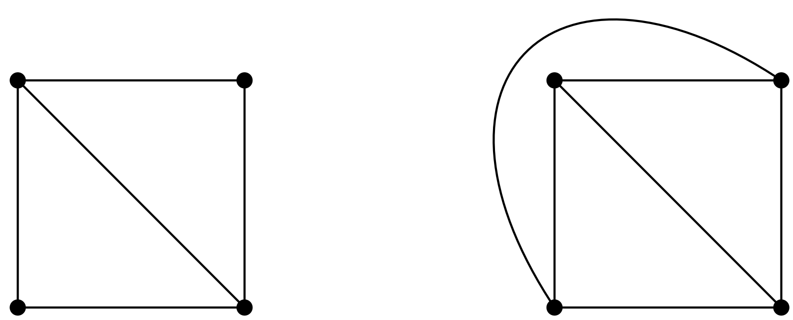
Figura 8: *O grafo acima possui* 4 *faces, numeradas de* 1 *a* 4*.*

5. A "demonstração" de Kempe

É importante ressaltar que a demonstração apresentada nesse artigo não é idêntica à apresentada por Kempe (que não possui muito rigor matemático), mas exibe as mesmas ideias e emprega o mesmo raciocínio. O artigo publicado por Kempe pode ser encontrado nas referências.

Antes de mais nada, introduziremos a técnica de triangularização de grafos planares (estaremos sempre considerando grafos com 3 ou mais vértices):

O processo consiste em adicionar a um grafo planar tantas arestas quanto for possível mantendo a sua planaridade. Quando não for mais possível adicionar arestas ao grafo, o novo grafo obtido será dito *triangularização* do grafo original. O nome vem do fato de que ao fim desse processo todas as faces de uma imersão plana do grafo obtido serão formadas por 3 vértices e 3 arestas (como triângulos!). De fato, se houvesse uma face com 4 ou mais vértices, seria possível adicionar uma aresta ligando dois deles mantendo a planaridade do grafo, como mostra a figura a seguir.

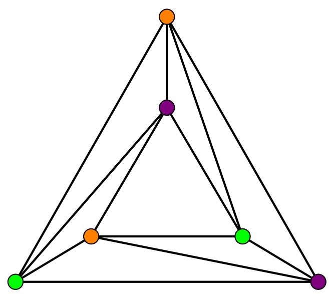


Grafo não triangularizado *Grafo triangularizado*

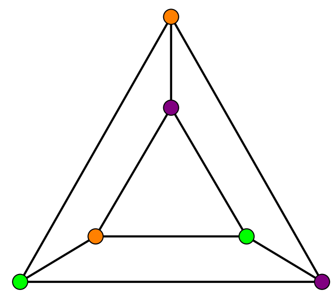
Figura 9

Muitas vezes, na matemática, problemas podem ser reduzidos a um caso particular, isto é, existe um caso particular tal que, resolvendo-se o problema para este caso, resolve-se também para os demais casos. Um exemplo de problema desse tipo é o da igualdade de polinômios: para provar que dois polinômios $p(x)$ e $q(x)$ são iguais para todo x real, basta provar que $p(x)$ e $q(x)$ são iguais para todo x natural! O problema de coloração de grafos planares também pertence a essa categoria. De fato, se provarmos que todo grafo triangularizado pode ser colorido com 4 cores, o mesmo poderá ser dito de qualquer grafo planar!

O motivo disso é evidente: é mais fácil colorir um grafo do que a sua triangularização. Imagine que a triangularização $T = (V, E')$ de um grafo planar $G = (V, E)$ possua uma coloração própria com 4 ou menos cores. Então, colorindo-se os vértices de G com as mesmas cores que eles tem em T, teremos uma coloração com 4 ou menos cores para G. Afirmamos que essa coloração é própria, pois todas as arestas de acordo com E são também arestas de acordo com E', logo, se não há vértices vizinhos em T que possuem a mesma cor, o mesmo será verdade em G.



A coloração própria no grafo triangularizado...



... também é própria no grafo original

Figura 10

Mas o que sabemos sobre grafos triangularizados?

Teorema 3. *Seja G um grafo finito triangularizado. Se $|V|$ e $|E|$ são, respectivamente, o número de vértices e de arestas de G, então*

$$|E| = 3|V| - 6$$

Encorajamos o leitor a demonstrar o teorema acima (dica: use indução)!

O Teorema acima irá implicar em um aspecto fundamental para a demonstração de Kempe: todo grafo triangularizado possui um vértice com grau menor que 6.

Observação 1. De modo geral, isso será verdade para qualquer grafo planar, triangularizado ou não. Afinal, o processo de triangularização pode aumentar o grau dos vértices, mas não diminuir.

Para verificar isso, imagine um grupo de pessoas das quais algumas apertam as mãos de algumas outras. Se cada pessoa contar quantos apertos de mão realizou e esses valores forem somados, o resultado final será duas vezes o número de apertos de mão realizados no total, pois cada aperto é contado duas vezes (uma por cada um dos envolvidos). Interpretando as pessoas como vértices de um grafo (qualquer) $G = (V, E)$ e que cada vértice "aperta a mão" daqueles com os quais se relaciona (isto é, os apertos de mão são as arestas do grafo), temos o **Lema do Aperto de Mão** (eu não inventei esse nome, pode pesquisar):

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2|E|$$

Ora, mas então, para um grafo triangularizado, temos

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 6|V| - 12 < 6|V|$$

de modo que deve ser verdade que tal grafo possui algum vértice com grau menor que 6.

Esse fato por si só é suficiente para demonstrar o **Teorema das Seis Cores**:

Teorema 4. *Não mais que seis cores são necessárias para uma coloração própria de um grafo planar.*

Demonstração. Basta demonstrar o fato para grafos triangularizados! Se existe um grafo triangularizado que precisa de sete ou mais cores para ser colorido, então existe um tal grafo, digamos $G = (V, E)$, com número mínimo de vértices. Como G é triangularizado, existe v vértice de G com grau menor do que ou igual a 5. Como G tem número mínimo de vértices, temos que $G - v$ pode ser colorido com 6 ou menos cores. Seja $c : V - \{v\} \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ uma tal coloração. Considere a coloração $c' : V \to \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dada por:

- $c'(u) = c(u)$ se u é um vértice de G diferente de v.
- $c'(v)$ é uma cor qualquer que não aparece dentre seus vizinhos.

Como v tem menos que 6 vizinhos, pelo menos uma das cores utilizadas não aparece dentre seus vizinhos, de modo que a coloração c' está bem definida. Além disso, é fácil ver que a coloração será própria e usa somente 6 cores. Contradição. Logo todo grafo triangularizado pode ser colorido com 6 ou menos cores. $\square$

Finalmente, entraremos nos pormenores do raciocínio empregado por Kempe. A arma secreta utilizada por ele para obter a sua engenhosa demonstração foi uma estrutura que seria mais tarde conhecida como *cadeia de Kempe*, e que apresentamos a seguir:

Definição 5. Dados um grafo $G = (V, E)$ e uma coloração $c : V \to X$ que usa pelo menos duas cores $a, b \in X$, chamamos de $(a, b)-$*cadeia de Kempe* as componentes conexas do subgrafo induzido pelos vértices de cores a ou b.

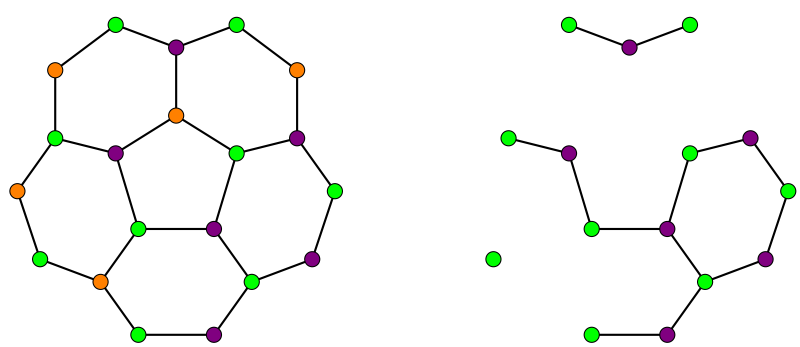


Figura 11: *Um grafo e suas três $(1, 2)-$cadeias de Kempe.*

A característica que faz das cadeias de Kempe tão convenientes é o fato de que, ao trocarmos as cores dos seus vértices em uma coloração própria, a nova coloração obtida ainda é própria. Mais formalmente, temos que:

Dados um grafo $G = (V, E)$, uma coloração própria $c : V \to X$ que usa pelo menos duas cores $a, b \in X$ e uma $(a, b)-$cadeia de Kempe ζ, a coloração induzida $c' : V \to X$ tal que

- $c'(u) = c(u)$ se u não é um vértice de ζ.

- $c'(u) = a$ se u é um vértice de ζ e $c(u) = b$.
- $c'(u) = b$ se u é um vértice de ζ e $c(u) = a$.

também é própria. Denotamos a coloração c' por $c * \zeta$.

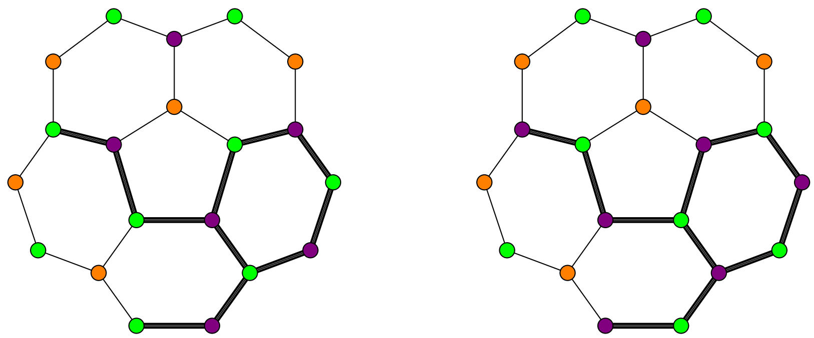


Figura 12: *Jogo dos* 11 *erros!*

Assim, dada uma coloração própria de um grafo, temos uma certa liberdade para alterar a cor de determinados vértices mantendo a coloração própria. Com isso, estamos prontos para enunciar a demonstração que dá nome ao artigo que lhe escrevo:

Demonstração. Basta demonstrar o fato para grafos triangularizados! Suponha que haja um grafo triangularizado que precisa de cinco ou mais cores para ser colorido. Então existe um tal grafo, digamos $G = (V, E)$, com número mínimo de vértices. Se G possui um vértice com grau menor do que ou igual a 3, um argumento idêntico ao da demonstração do **Teorema 4** nos permitirá colorir G com 4 cores, gerando assim uma contradição. Logo, todos os vértices de G devem ter grau maior do que ou igual a 4.

Sabemos também que, como G é triangularizado, existe v vértice de G com grau menor do que ou igual a 5. Além disso, como G tem número mínimo de vértices, temos que $G - v$ pode ser colorido com 4 ou menos cores. Seja $c : V - \{v\} \to \{1, 2, 3, 4\}$ uma tal coloração. Note que todas as cores devem aparecer dentre os vizinhos de v, pois, caso contrário, poderíamos colorir v com uma das cores que não aparece, de modo a gerar uma coloração própria de G com apenas 4 cores, o que seria uma contradição.

Fixe uma imersão plana ϕ de G. Por questão de simplicidade, não faremos distinção dos nomes dos elementos do grafo e suas representações em ϕ, isto é, chamaremos de w o ponto de ϕ que representa o vértice w de G, e chamaremos de e o arco de ϕ que representa a aresta e de G.

Vamos, agora, considerar os seguintes casos:

Caso 1: v tem 4 vizinhos:

Seja $N(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Sabemos que todas as cores devem aparecer dentre os vizinhos de v. Podemos supor sem perda de generalidade que $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$, $c(v_3) = 3$, $c(v_4) = 4$, e que a disposição relativa de v_1, v_2, v_3, v_4 em ϕ é como na figura:

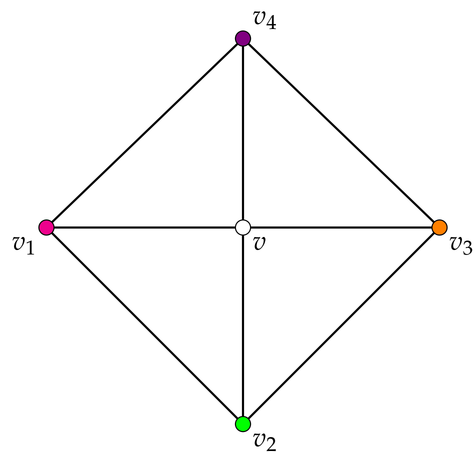


Figura 13

Seja ζ_1 a $(1, 3)-$cadeia de Kempe contendo v_1. Se v_3 não é vértice de ζ_1, podemos trocar suas cores sem influenciar os demais vértices, de modo a obter a nova coloração própria $c * \zeta_1$ de G, em que $c * \zeta_1(v_1) = 3$, $c * \zeta_1(v_2) = 2$, $c * \zeta_1(v_3) = 3$, $c * \zeta_1(v_4) = 4$. Nessa nova coloração, v não possui vizinho de cor 1, de modo que podemos colorir o próprio v com a cor 1, gerando uma coloração própria com 4 cores de G. Contradição.

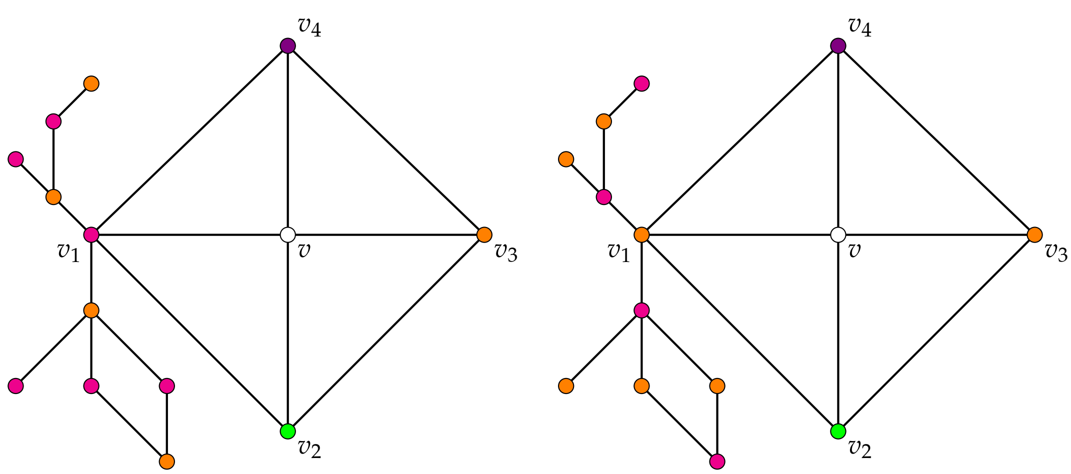


Figura 14: *Jogo dos* 10 *erros!*

Caso v_3 seja vértice de ζ_1, existe um ciclo $v, v_1, a_1, a_2, \cdots, a_n, v_3, v$ cujo único vértice que não é de cor 1 ou 3 é o próprio v, que ainda não está colorido. Observe que esse ciclo separa os vértices v_2 e v_4 em duas regiões distintas.

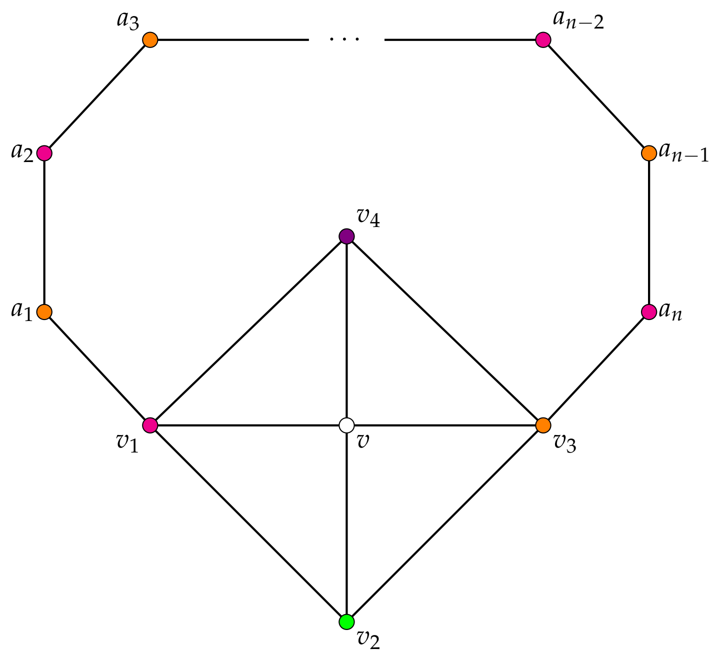


Figura 15

Seja ζ_2 a $(2, 4)-$cadeia de Kempe contendo v_2. Note que v_4 não pode ser vértice dessa cadeia, pois como ela não possui vértices em comum com o ciclo $v, v_1, a_1, a_2, \cdots, a_n, v_3, v$, a única forma de isso acontecer seria caso uma das suas arestas cruzasse com uma aresta do ciclo, mas sabemos que isso não ocorre, pois a nossa imersão é planar. Assim, podemos trocar as cores dessa cadeia sem influenciar os demais vértices, de modo a obter uma nova coloração própria $c * \zeta_2$ de G, em que $c * \zeta_2(v_1) = 1$, $c * \zeta_2(v_2) = 4$, $c * \zeta_2(v_3) = 3$, $c * \zeta_2(v_4) = 4$. Nessa nova coloração, v não possui vizinho de cor 2, de modo que podemos colorir o próprio v com a cor 2, gerando uma coloração própria com 4 cores de G. Contradição.

Caso 2: v tem 5 vizinhos:

Seja $N(v) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \tilde{v}\}$. Sabemos que todas as cores devem aparecer dentre os vizinhos de v. Dessa forma, como temos quatro cores, exatamente uma delas irá se repetir. Podemos supor sem perda de generalidade que $c(v_1) = 1$, $c(v_2) = 2$, $c(v_3) = 3$, $c(v_4) = 4$, $c(\tilde{v}) = 4$, e que a disposição relativa de v_1, v_2, v_3, v_4, $\tilde{v}$ em ϕ é como na figura:

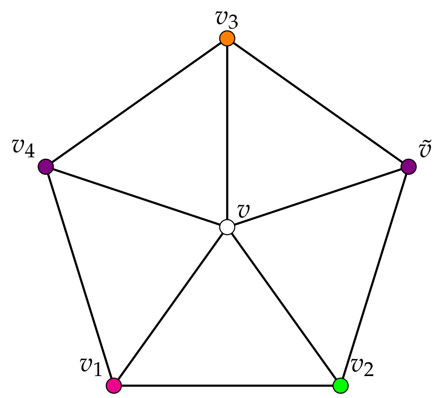


Figura 16

Considere a $(1,3)-$cadeia de Kempe contendo v_1. Se v_3 não é vértice dessa cadeia, podemos trocar as cores da cadeia sem influenciar os demais vértices, de modo a obter, usando a construção do caso anterior, uma coloração própria com 4 cores de G, o que seria uma contradição. Da mesma forma, v_3 deverá ser vértice da $(2,3)-$cadeia de Kempe contendo v_2.

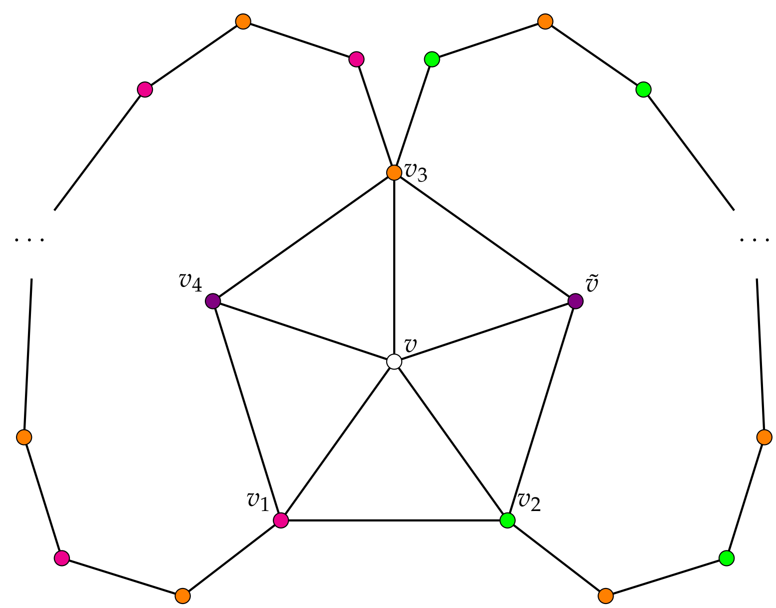


Figura 17

Seja ζ_1 a $(1,4)-$cadeia de Kempe contendo $\tilde{v}$. Note que v_1 e v_4 não podem ser vértices dessa cadeia, pois existe um ciclo de cores 2 e 3 separando $\tilde{v}$ de v_1 e v_4. Dessa forma, podemos trocar as cores dessa cadeia sem influenciar os demais vértices, obtendo uma coloração própria $c * \zeta_1$ de G em que $c * \zeta_1(v_1) = 1$, $c * \zeta_1(v_2) = 2$, $c * \zeta_1(v_3) = 3$, $c * \zeta_1(v_4) = 4$, $c * \zeta_1(\tilde{v}) = 1$.

De modo análogo, nessa nova coloração, a $(2,4)-$cadeia de Kempe contendo v_4, digamos ζ_2, não pode conter v_2, de forma que podemos trocar as cores dessa cadeia sem influenciar os demais vértices, obtendo uma coloração própria $c * \zeta_1 * \zeta_2$ de G em que $c * \zeta_1 * \zeta_2(v_1) = 1$, $c * \zeta_1 * \zeta_2(v_2) = 2$, $c * \zeta_1 * \zeta_2(v_3) = 3$, $c * \zeta_1 * \zeta_2(v_4) = 2$, $c * \zeta_1 * \zeta_2(\tilde{v}) = 3$.

Como nessa nova coloração a cor 4 não aparece dentre os vizinhos de v, podemos colorir v com 4, gerando assim uma coloração própria de G com 4 cores. Contradição.

$\square$

E então? Conseguiu encontrar o erro?

Vosso humilde narrador sugere fortemente que seja feita, nesse ponto do artigo, uma pausa. Saboreie os passos da demonstração que acabou de ver, e reflita se todos eles lhe parecem logicamente satisfatórios, assim como pareceram para a comunidade matemática da época. Antes de prosseguir, esteja ciente que uma vez encontrado o erro, você não poderá mais desencontrá-lo!

6. O erro

Em 1890, 11 anos mais tarde, o matemático inglês Percy John Heawood (1861-1955) publicou um artigo apontando um erro na demonstração de Kempe.

Perceba que a demonstração de Kempe consiste em um algoritmo: dado um grafo planar com todos os vértices coloridos com 4 cores com exceção de um com grau menor do que ou igual a 5, você deveria ser capaz de, recolorindo algumas cadeias de Kempe de acordo com os passos da demonstração, chegar a uma coloração própria do grafo por inteiro. No entanto, isso não ocorre, como se pode ver pelo exemplo a seguir:

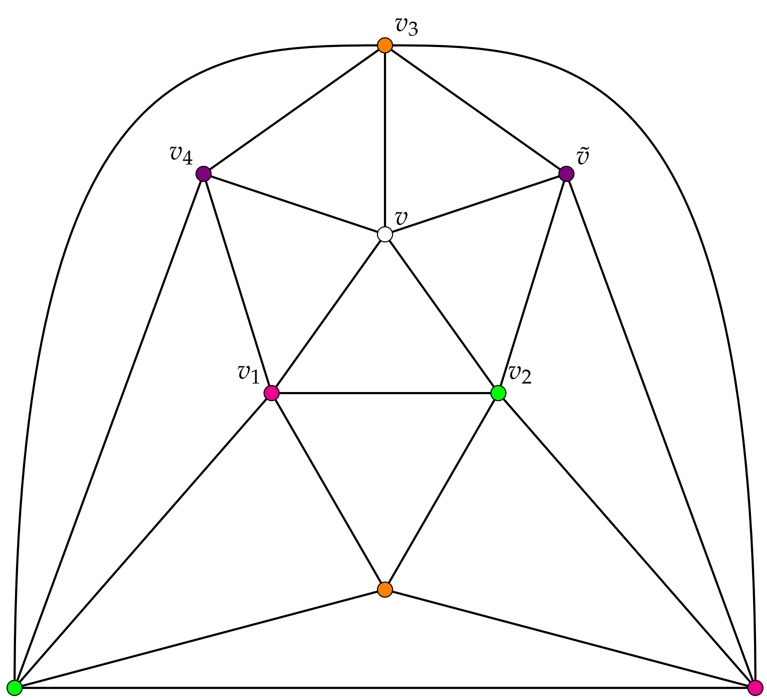


Figura 18

Como se pode reparar, o erro na demonstração se encontra na **Figura 17**, onde assumimos de maneira implícita que o caminho alternante de cores 1 e 3 ligando v_1 e v_3 e o caminho alternante de cores 2 e 3 ligando v_2 e v_3 são *disjuntos*, o que definitivamente pode não ocorrer. Caso no grafo em questão tais caminhos sejam, de fato, disjuntos, o algoritmo funcionará perfeitamente.

Observação 2. O contra exemplo apresentado acima não foi o mesmo exibido por Heawood em seu artigo, que era bem mais complexo, contando com 25 vértices.

Mas nem tudo estava perdido! Em seu artigo, Heawood demonstrou que as ideias de Kempe poderiam ser empregadas para demonstrar uma versão levemente mais fraca do teorema:

Teorema 5. *Não mais que cinco cores são necessárias para uma coloração própria de um grafo planar.*

A demonstração deste fato é muito semelhante a do **Caso 1** da demonstração incorreta apresentada para o **Teorema 2** (note que a demonstração do **Caso 1** está correta!). Seu desenvolvimento será deixado a cargo do leitor, para que este possa exercitar o seu recém adquirido arsenal de conhecimentos relacionados a grafos planares e suas colorações.

7. A demonstração (de verdade dessa vez)

No ano de 1976, mais de 100 anos após a primeira publicação de seu enunciado por Augustus De Morgan, o Teorema das Quatro Cores foi finalmente (corretamente) demonstrado por Kenneth Appel (1932-2013) e Wolfgand Haken (1928-).

A demonstração empregada por eles consistiu em provar que um conjunto finito de configurações é inevitável em qualquer grafo triangularizado, isto é, existe um conjunto finito de grafos tais que pelo menos um deles é subgrafo de qualquer grafo triangularizado. Seu objetivo era mostrar que, a partir de cada uma dessas configurações, seria possível obter a partir de uma coloração parcial uma coloração completa recolorindo-se alguns vértices (assim como Kempe tentou fazer). Tal demonstração reduziu o espaço amostral de infinitos possíveis grafos planares para meros 1834 casos a serem verificados. No entanto, embora você deva concordar que 1834 é muito menos que infinito, ainda se trata de uma quantidade desagradavelmente grande de casos para se trabalhar manualmente. Por esse motivo, para verificar cada um dos casos, Appel e Haken fizeram uso de meios computacionais, levando o Teorema das Quatro Cores a entrar para a história como o primeiro grande teorema a ser demonstrado com ampla assistência de um computador.

Com o decorrer dos anos, o número de casos a serem verificados foi reduzido. Entretanto, até a data de publicação deste artigo não se conhece uma demonstração alternativa, mais elementar ou elegante, por assim dizer, para o Teorema das Quatro Cores.

Ora, por que haveria uma tal? A comunidade matemática não se contentou com a certeza de que o fato é verdadeiro? Certamente que não! Pois, embora a validez da demonstração com assistência de um computador tenha sido verificada, ela não nos oferece um entendimento profundo das razões pelas quais o teorema é verdadeiro. Tenha certeza de que uma demonstração por meios clássicos para o Teorema das Quatro Cores traria noites de sono mais tranquilas para muitos matemáticos da nossa era (o que lhe escreve incluso).

Referências

[1] Ralph Bravaco e Shai Simonson. *The Four-Color Theorem*. Stonehill College. URL: http://web.stonehill.edu/compsci/lc/four-color/four-color.htm (acesso em 24/11/2020).

[2] Alfred Bray Kempe. "On the Geographical Problem of the Four Colours". Em: *American Journal of Mathematics* 2.3 (1879).

[3] Timothy Sipka. "Alfred Bray Kempe's "Proof" of the Four-Color Theorem". Em: *Math Horizons* 10.2 (2002).

[4] Alexander Soifer. *The Mathematical Coloring Book*. Springer, 2009. ISBN: 9780387746425.

[5] "Arthur Cayley". Em: Wikipedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Arthur_Cayley (acesso em 24/11/2020).

[6] "Augustus De Morgan". Em: Wikipedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Augustus_De_Morgan (acesso em 24/11/2020).

[7] "Four color theorem". Em: Wikipedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Four_color_theorem (acesso em 24/11/2020).

[8] "Percy John Heawood". Em: Wikipedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Percy_John_Heawood (acesso em 24/11/2020).

[9] "William Rowan Hamilton". Em: Wikipedia. URL: https://en.wikipedia.org/wiki/William_Rowan_Hamilton (acesso em 24/11/2020).

[10] *The Four Color Map Theorem - Numberphile*. YouTube. 2017. URL: https://youtu.be/NgbK43jB4rQ (acesso em 24/11/2020).