

# O que veio primeiro: a roda ou a estrada?

ANTONIO VELOSO

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação Universidade de São Paulo (ICMC-USP)  
antoniomavs@usp.br

## Resumo

*O questionamento sobre o surgimento de duas coisas coligadas, tais como: ovo e galinha, futebol e bola, Piu-Piu e Frajola, roda e estrada, teve, e ainda tem, importante papel no imaginário popular. Aristóteles (384 a.C-322 a.C), Plutarch (46 d.C - 119 d.C) e Macrobius (370 d.C) são intelectuais que, por exemplo, se dispuseram a discutir sobre a origem das coisas, muitas vezes tomando questões difíceis, como: “Quem (ou o que) criou a humanidade?”. Nesse contexto, o objetivo desse artigo é, de forma descontraída, imaginar o que aconteceria se por um momento as rodas não fossem do jeito como conhecemos. Tentar recriar o famoso questionamento “Ovo ou a Galinha?” para algo mais interessante, visando ajudar o Sr. Flintstone a resolver o que fazer com um par de rodas quadradas.*

## 1. CONCEITOS BÁSICOS

Antes de começarmos a de fato conjecturar o problema da roda, precisamos situar o leitor sobre as ferramentas que iremos usar durante o texto. Começaremos definindo os conceitos de equação diferencial ordinária, integrabilidade de funções e por fim comprimento de curva. Primeiramente, seja  $y : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $C^k(\mathbb{R})$ <sup>1</sup>. Diremos que a equação

$$\sum_{i=0}^k a_i y^{(i)}(x) = a_0(x)y(x) + \dots + a_k(x)y^{(k)}(x) = 0,$$

é uma **Equação Diferencial Ordinária**<sup>2</sup>, onde as funções  $a_i$  também são diferenciáveis e  $y^{(i)}$  representa a  $i$ -ésima derivada da função  $y$ . Juntamente com a equação diferencial, é comum que existam valores iniciais que devam ser satisfeitos pela função desconhecida  $y$ . Usualmente, chamamos essa combinação de **Problema de Valor Inicial** (PVI). Vejamos um exemplo: seja  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função que satisfaça o sistema a seguir

$$\begin{cases} y^{(2)}(t) = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

A primeira equação é o que chamamos de EDO e a segunda igualdade representa a condição de existência. Observe que (1) tem infinitas soluções, uma vez que conseguimos explicitá-las pela família de funções

$$Y = \left\{ y(t) \in C^n(\mathbb{R}) : y(t) = \frac{t^2}{2} + ct + 1, \quad c \in \mathbb{R}, \quad n \geq 2. \right\}$$

<sup>1</sup>Conjunto de funções contínuas com  $k$ -derivadas contínuas.

<sup>2</sup>Também comumente chamada de EDO

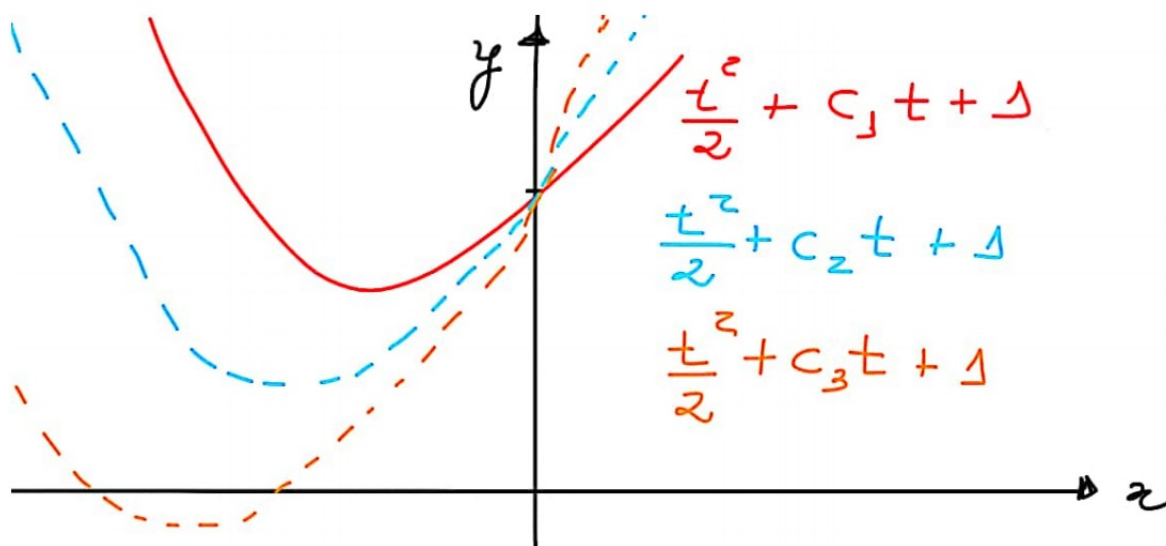


Figura 1: Família de funções soluções do PVI, em que  $c_3 > c_2 > c_1 > 0$ .

Esse tipo de equação será de suma importância para a discussão do exercício aqui proposto, uma vez que estaremos constantemente trabalhando com aproximações e de certa forma calculando velocidade e aceleração de objetos. Na verdade, a relevância das EDO's transcende o uso apresentado aqui no artigo e é um dos jeitos mais antigos (e sofisticados) de se traduzir problemas físicos para uma linguagem matemática.

Agora, para podermos definir integral e comprimento de curva, precisamos de alguns conceitos preliminares. Dado um intervalo  $[a, b]$  da reta real, uma **partição** de  $[a, b]$  nada mais é do que um conjunto  $P$  que contenha  $n \in \mathbb{N}$  pontos do intervalo, sendo dois deles os seus extremos. Ou seja,

$$P := \{a = t_0, t_1, \dots, b = t_n\} \subset [a, b].$$

Note que enumeramos esses pontos em  $P$  e podemos supor que  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ . Com isso é possível definir os **intervalos da partição**, dados pelos conjuntos

$$I_i := [t_{i-1}, t_i], \quad 1 \leq i \leq n.$$

Perceba que cada intervalo  $I_i$  está contido em  $[a, b]$  e, portanto, é possível definir um pontilhamento  $\mathcal{P}$  da partição como um conjunto (infinito), denotado por

$$\mathcal{P} := \{(x_i, I_i) : x_i \in I_i, 1 \leq i \leq n \text{ fixado}\}.$$

Diremos ainda que o comprimento de  $\mathcal{P}$  é igual ao comprimento do maior intervalo  $I_i$ , ou seja,

$$\|\mathcal{P}\| = \max\{l(I_i) = |t_i - t_{i-1}| : 1 \leq i \leq n\}.$$

Por sua vez, seja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função qualquer da reta. Tendo definido a partição e os intervalos da partição, podemos de forma geométrica construir retângulos, em que um dos lados será o comprimento do intervalo  $I_i$  e o outro será a altura de um ponto qualquer  $f(x_i)$ , com  $x_i \in I_i$ . Se somarmos a área de todos esses retângulos teremos uma aproximação da área real do gráfico

de  $f$ . Chamaremos tal aproximação de **Soma de Riemann**<sup>3</sup>

$$S(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n f(x_i)l(I_i).$$

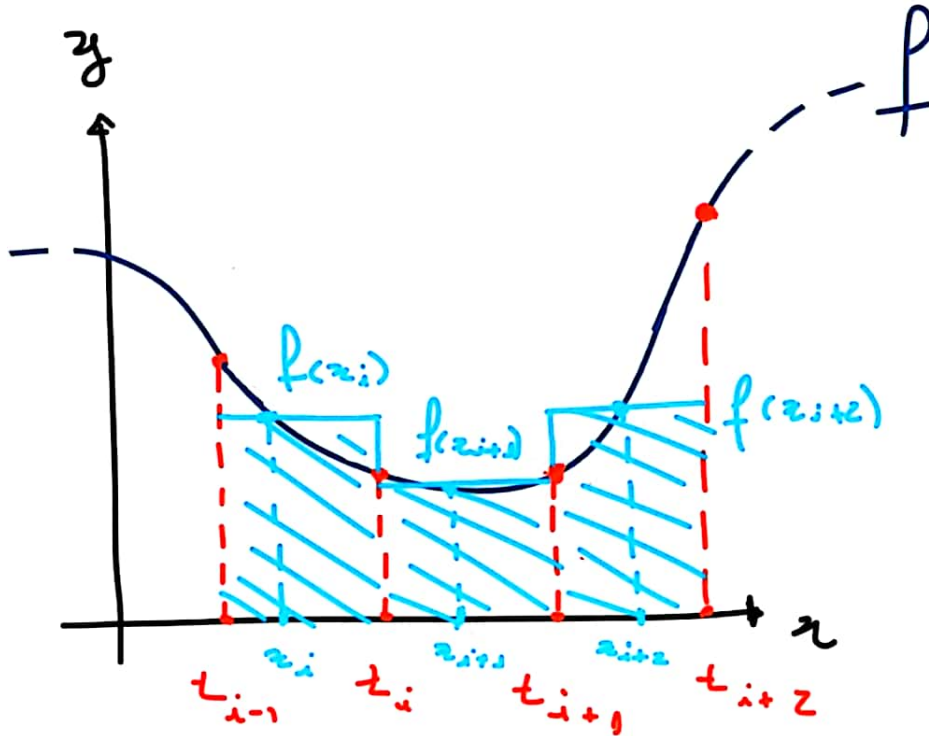


Figura 2: Parte dos retângulos que formam a soma de Riemann.

Intuitivamente, quanto maior for o número de retângulos, menor vai ser o erro da nossa aproximação. Logo, a ideia aqui de fato consiste em tomarmos uma partição  $\mathcal{P}$  com o máximo de pontos em  $[a, b]$  para podermos somar “infinitas” áreas de retângulos. Na realidade, iremos tomar o processo de limite tomando o tamanho das partições tão pequena quanto quisermos, o que é equivalente a pegarmos tantos retângulos quanto quisermos. Contudo, o leitor pode se perguntar:

“E se as áreas dos retângulos forem crescendo conforme diminuimos o intervalo  $I_i$ ?”

Em outras palavras, quando a função  $f$  é integrável? Note que, por estarmos somando infinitas áreas, esse valor poderia crescer incessantemente e tender a infinito. A título de curiosidade é o que ocorre com a integral de  $f(x) = \frac{1}{x}$  com  $x \in (0, 1]$ . Logo, diremos que uma função  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável se existir  $A \in \mathbb{R}$ , tal que para, qualquer  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  de modo que, toda partição  $\mathcal{P}$  que satisfaça  $\|\mathcal{P}\| < \delta$  é tal que

$$|S(f, \mathcal{P}) - A| < \epsilon$$

<sup>3</sup>Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) foi um renomado matemático alemão, fez contribuições fundamentais para a análise e geometria diferencial.

Nesse caso,  $A$  é chamado de **integral de  $f$  sobre  $[a, b]$** .

Por fim, já tendo a noção do que é a integral de uma função e de quando ela é integrável, nos falta a noção de comprimento de uma curva. Nesse caso, pense que calcular o perímetro de um quadrado pode ser simples com a ajuda de uma régua. Contudo se formos retirando seus vértices e criando formas mais “curvas”, essa medição pode se tornar mais complexa. Então, da mesma forma como foi feito com a integral de  $f$  sendo aproximada por retângulos, iremos aproximar o gráfico de  $f$  por segmentos de reta ligando os pontos da curva. Assim tomando pontos  $f(t_i)$  cada vez mais próximos, conseguiremos uma excelente aproximação da curva por segmentos de retas e facilitaremos o cálculo de seu comprimento (lembra como medir o lado de uma porta com uma trena é simples?)

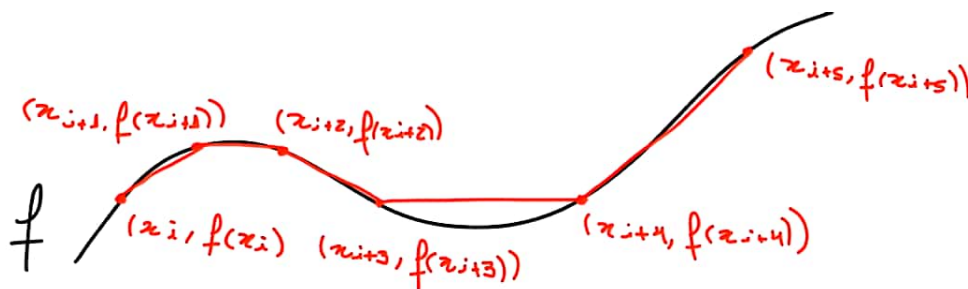


Figura 3: Um excerto de  $f$  com os pontos da partição  $P$  projetados na curva.

Finalmente, dado  $c \in [a, b]$ , a **derivada** de  $f$  em  $c$  é expressa pela operação

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

De forma mais simples, estamos tomando dois pontos,  $c+h$  e  $c$ , e diminuindo cada vez mais o comprimento da semirreta que os conecta (ou seja, tomando  $h$  para zero). Caso esse limite exista, dizemos que essa é a derivada de  $f$  em  $c$ .

Com a visão intuitiva da derivada, podemos tomar uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  qualquer e sua derivada  $f' : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  (caso exista), de tal forma que o comprimento do segmento que parte de  $(t_{i-1}, f(t_{i-1}))$  e chega a  $(t_i, f(t_i))$  pode ser calculado pela distância usual em  $\mathbb{R}^2$ . De uma forma mais matemática, usando o Teorema de Pitágoras, temos

$$d((t_{i-1}, f(t_{i-1})), (t_i, f(t_i)))^2 = (t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2$$

Pela imagem (2) conseguimos calcular o comprimento do gráfico de  $f$  de forma intuitiva. Note que, se definirmos uma função que calcula o comprimento de cada segmento formada pelos pontos  $f(t_i)$ , ao tomarmos a sua integral em  $[a, b]$  estaremos obtendo o comprimento total da função. O comprimento da soma desses segmentos no intervalo  $[a, b]$  será expresso por

$$\sum_{i=1}^n d((t_{i-1}, f(t_{i-1})), (t_i, f(t_i))) = \sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f(t_i) - f(t_{i-1}))^2}.$$

Usando o Teorema do Valor Médio [3], sabemos que existe  $x_i \in (t_{i-1}, t_i)$  tal que

$$f'(x_i) = \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}.$$

Portanto, temos

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (f'(x_i)(t_i - x_{i-1}))^2} = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{1 + f'(x_i)^2}.$$

Por fim, sendo os intervalos  $I_i$  arbitrariamente pequenos, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \right) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Com isso, finalizamos a parte de conceitos básicos e estamos prontos para ver do que se trata o problema da roda. Na realidade, esse não é exatamente um problema, mas sim uma suposição: você já pensou em como seriam as ruas se as rodas não fossem circunferências?

## 2. CONSTRUINDO O PROBLEMA

“Por que a roda é redonda? Não poderia ser quadrada ou triangular? Não seja um cabeça de pedra, venha conhecer a evolução dinomobilística” - Rord, há muito tempo atrás em algum lugar do período Triássico.

Nosso amigo *Fred Flintstone*, encantado com o questionamento que ouviu pelo rádio, se pôs a pensar:

“Qual a razão para todos os carros possuírem o mesmo formato de roda? Será que não existia outra forma mais eficiente de formatação?”

Se seu carro tivesse mais opções de rodas, poderia se adaptar melhor a outros solos, quem sabe não iria sofrer com congestionamentos, ou subiria a serra de forma mais eficiente e sem esforço. Encantado pela ideia de ter menos trabalho para circular pela Pangeia, *Fred* comprou o carro e ganhou três tipos de rodas diferentes (triangular, quadrada e circular) para ter como opção de uso. Contudo, ao chegar em casa, *Wilma*, sua esposa, notou que a roda quadrada era muito difícil de rolar. Ela então perguntou

- *Fred*, em que tipo de estrada você vai usar essa roda aqui?

Então o Sr. *Flintstone* começou a pensar em que tipo de estrada ela seria ideal. Por trabalhar em uma pedreira, conhecia vários tipos de solo, mas não fazia ideia de algum terreno “fértil” para essa roda.

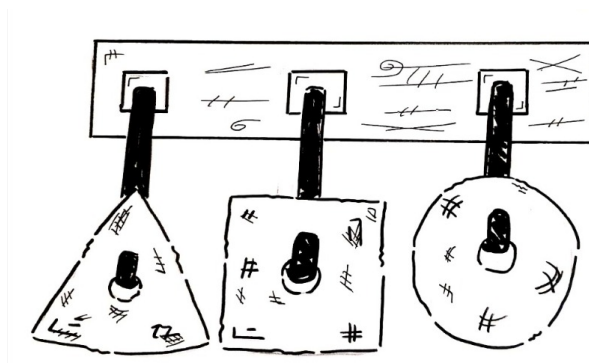


Figura 4: Rodas que Fred ganhou na compra de seu novo automóvel

Por acaso do destino, em um passeio rotineiro na nossa máquina do tempo, encontramos o *Fred* em um de seus monólogos para solucionar essa questão que o atormentava. Para seu alento, iremos usar as ferramentas que conhecemos (e foram apresentadas na seção anterior) com o intuito de ajudá-lo. Primeiramente, uma roda deve satisfazer duas propriedades básicas para o bom funcionamento do veículo [4]:

- C1 Estar sempre em contato com a pista, ou seja, a qualquer instante do percurso de *Fred* com seu novo carro sempre existirá um ponto da roda que encosta na estrada. Mais do que isso, a distância percorrida pela roda na estrada é a mesma do carro na estrada, implicando que se a roda quadrada de lado  $L$  deu uma volta completa, o comprimento percorrido é de  $4L$  na estrada e na roda;
- C2 O centro de massa da roda se mantém constante durante o percurso, ou seja, não será necessário nenhum tipo de amortecimento por parte do carro.

Com esses dois itens em mente é possível imaginar como será o percurso dessa roda quadrada ao longo da estrada ideal.

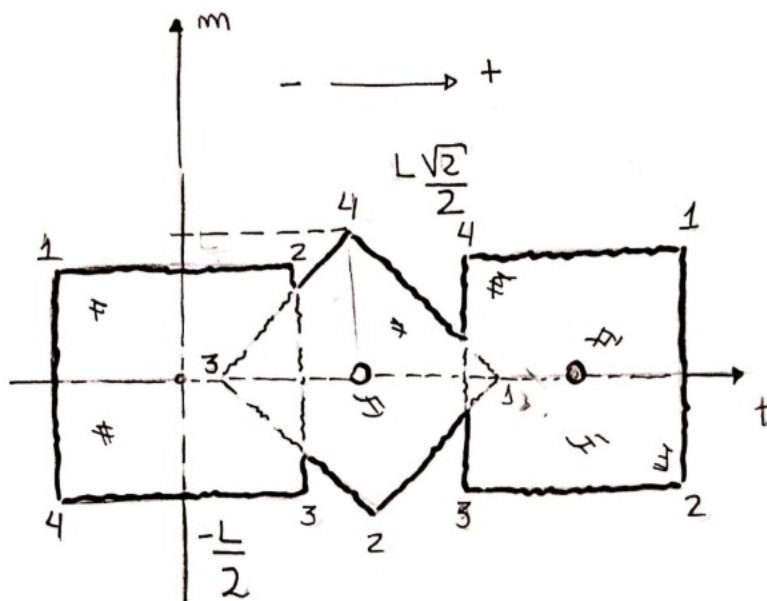


Figura 5: Ideia de como a roda irá se comportar durante o percurso.

A primeira coisa a ser feita é fixar dois vértices do quadrado no eixo  $y$ , ilustrado na imagem a seguir.

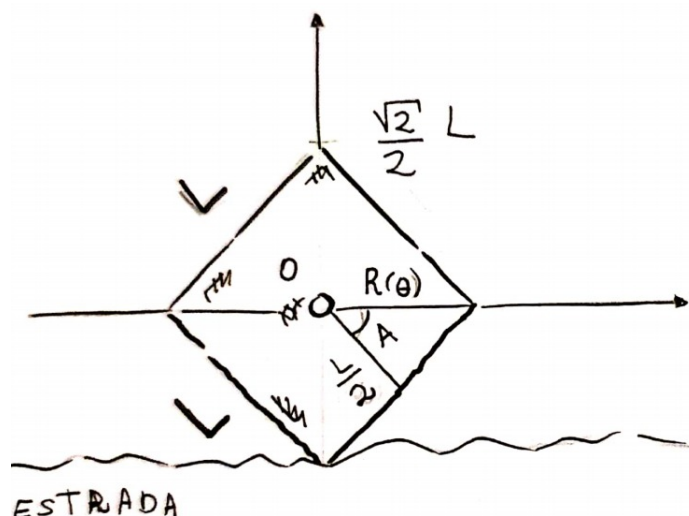


Figura 6: Funcionamento da roda com as funções construídas.

Precisaremos de algumas funções para nos ajudar na resolução do problema, pensando que precisamos medir: a distância percorrida pela roda, pelo carro (distância da estrada) e, como a altura da roda não é uniforme, é necessário também calcular o ângulo de rotação. Dessa forma conseguiremos expressar o decrescimento da pista em relação a roda, para cada parâmetro apontado iremos construir uma função:

$$\left\{ \begin{array}{ll} F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, & \text{representará a distância percorrida pela roda;} \\ A : I \subset \mathbb{R} \rightarrow [-2\pi, 2\pi], & \text{representará o ângulo da roda em relação à posição inicial,} \\ & \text{no tempo } t_0 \text{ antes de qualquer movimento;} \\ \theta : I \rightarrow [-2\pi, 2\pi], & \text{representará o ângulo formado pela semirreta que sai da origem} \\ & \text{chega ponto fixo } P_t \text{ com o eixo vertical;}^4 \\ R : [-2\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, & \text{representará a altura da roda em relação ao seu eixo (Origem).} \end{array} \right.$$

Não definimos explicitamente nenhum parâmetro das funções acima, mas note que precisamos calcular todos esses parâmetros em função do “tempo de percurso”, logo a princípio todas as funções dependem do tempo de alguma forma. Perceba que por hipótese a distância percorrida por uma roda é proporcional à distância percorrida na estrada, ao menos esse foi um parâmetro que julgamos necessário para a realização do problema. Dito isso, é necessário que:

$$F(t) = -R(\theta(t)), \quad t \in I \quad (2)$$

o sinal negativo é importante pois o raio, ou altura, estará se movendo no sentido contrário ao do movimento vertical. É verdade que podemos colocar o ponto inicial do percurso, digamos um tempo  $t_0$ , o ângulo do ponto fixado  $P_t$  da roda que encosta na estrada com o eixo horizontal ao centro de massa é  $\frac{\pi}{2}$ , estamos colocando o pneu de pedra “em pé”, assim como na figura (6). Logo, definimos  $\theta(0) = -\frac{\pi}{2}$ , por  $A$  tratar-se de uma função que mede a amplitude do ângulo percorrido pelo ponto fixado, podemos generalizar a função  $\theta : I \rightarrow [-2\pi, 2\pi]$ , por

$$\theta(t) = -A(t) - \frac{\pi}{2}, \quad \forall t \in I. \quad (3)$$

Novamente o sinal negativo se faz presente pois estamos orientando positivamente o movimento da roda e não o sentido de medição dos ângulos. Com efeito, sabemos calcular o comprimento de uma curva, que no caso será a nossa estrada. Por hipótese, a distância percorrida pela roda é a mesma da estrada, na realidade podemos pedir mais do que isso, precisamos que a distância percorrida pela roda seja equivalente ao ângulo percorrido pelo ponto, pois caso não seja assim estaríamos considerando uma derrapagem ou fenômeno similar, aqui iremos tratar apenas que a roda anda suavemente pela pista. Em outras palavras e de uma forma mais rigorosa, dado  $t \in I$ , o comprimento do arco andado em  $\theta$  será igual ao percorrido por  $F$ , implicando

$$\int_0^t \sqrt{1 + \left[\frac{dF}{dt}\right]^2} dt = \int_{\theta(0)}^{\theta(t)} \sqrt{(R(\theta))^2 + \left[\frac{dR}{d\theta}\right]^2} d\theta. \quad (4)$$

Portanto se queremos saber o movimento da roda a partir do tempo  $t_0$  - que por conveniência iremos chamar de 0 - até um tempo  $t$  qualquer em  $I$ , tomando  $F$  como sendo a distancia percorrida na estrada, basta tomarmos

$$\int_0^t \sqrt{1 + \left[\frac{dF}{dt}\right]^2} dt, t \in I$$

por estarmos mexendo com aproximações via retas, conseguimos garantir continuidade das funções integradas, consequentemente a igualdade abaixo se mantém<sup>5</sup>

$$\sqrt{1 + \left[\frac{dF}{dt}\right]^2} = \sqrt{(R(\theta))^2 + \left[\frac{dR}{d\theta}\right]^2} \cdot \left(1 + \left[\frac{dF}{dt}\right]^2\right) = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cdot \left((R(\theta))^2 + \left[\frac{dR}{d\theta}\right]^2\right),$$

da equação (2), sabemos que  $F(t) = -R(\theta(t))$ , logo pela regra da cadeia,  $\frac{dF}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \frac{dR}{d\theta}$  substituindo na igualdade anterior, temos

$$1 + \left(-\frac{d\theta}{dt} \frac{dR}{d\theta}\right)^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \cdot \left((R(\theta(t)))^2 + \left[\frac{dR}{d\theta}\right]^2\right).$$

Paremos por um instante para refletir que, novamente pela hipótese (2), a roda encaixa perfeitamente na pista, portanto o raio da roda é igual a profundidade da pista, assim utilizando novamente a regra da cadeia, temos

$$1 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 = (R(\theta(t)))^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dF}{dt}\right)^2 \therefore 1 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 R(\theta(t))^2$$

consequentemente

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{1}{R(\theta(t))} \underset{\text{Pela eq. (2)}}{\Rightarrow} F(t) = -\frac{1}{\theta(t)}, t \in I.$$

Portanto conseguimos modelar o problema da roda para uma relação de EDO's, agora nos resta de fato usar características intrínsecas da geometria da roda, pois até o momento fizemos a modelagem considerando o movimento mas não necessariamente o formado do pneu. O que foi argumentado como usando a forma "quadrangular" da roda pode ser substituída por um polígono de  $n$  lados.

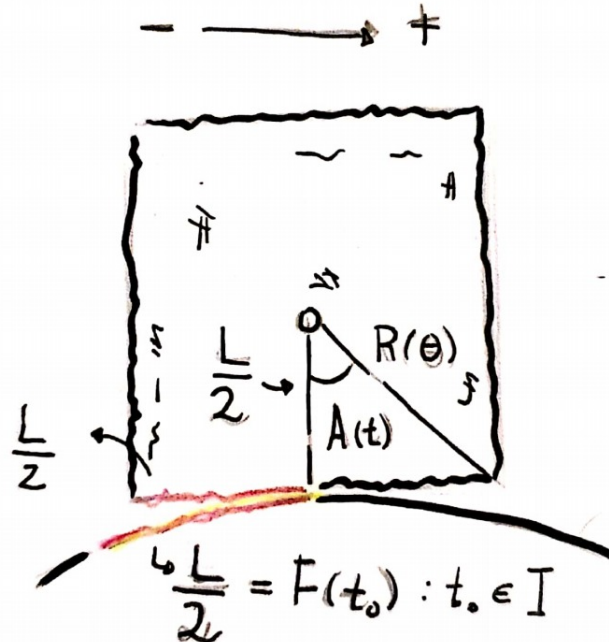
<sup>5</sup>Aqui estamos usando implicitamente a Regra de Leibnitz para Integrais, basicamente nos diz que a integração comuta com a derivada, ou seja, a derivada da integral de  $f$  é igual a integral da derivada de  $f$ .



## 3. A RODA QUADRADA, YABBA DABBA DO!

Estabelecemos uma relação entre as funções  $F, A, \theta, R$  que criamos para solucionar o problema de rodas que não são “normais”. Note que se olharmos para o quadrado da Figura 7 a amplitude do ângulo pode ser medida por

$$\cos(A(t)) = \frac{L}{2R(\theta)}, \quad A(t) \in \left[ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]. \quad (5)$$



**Figura 7:** Funcionamento da roda com as funções construídas e com uma visão mais intuitiva do funcionamento da F.[2]

Pensando dessa mesma forma, porém, acoplando a roda na posição inicial do problema no tempo  $t_0$ , teremos o ângulo  $\theta(t)$  variando de  $-\frac{3\pi}{4}$  a  $\frac{\pi}{4}$ , pois  $A$  satisfaz (5) e, para qualquer  $t \in I$ , definimos  $\theta(t) = -A(t) - \frac{\pi}{2}$ , se juntarmos (5) com  $\frac{d\theta}{dt} = \pm \frac{1}{R(\theta(t))}$ , temos

$$L \cdot \frac{d\theta}{dt} = 2 \cos \left( -\theta(t) - \frac{\pi}{2} \right), \quad t \in I$$

ou seja, juntando o fato de que dado um tempo  $t \in I$  qualquer do percurso, temos

$$A(t) = -\theta(t) - \frac{\pi}{2} \text{ e } R(\theta) = -\frac{1}{\dot{\theta}(t)} \Rightarrow L\dot{\theta}(t) = 2 \cos \left( -\theta(t) - \frac{\pi}{2} \right)$$

note que na igualdade acima estamos calculando uma subtração de argumentos em uma função trigonométrica, a soma de argumentos de uma função seno ou cosseno, pode ser expressa por

$$\cos \left( -\theta(t) - \frac{\pi}{2} \right) = \cos(-\theta(t)) \cos \left( -\frac{\pi}{2} \right) + \sin(-\theta(t)) \sin \left( -\frac{\pi}{2} \right) = -\sin(\theta(t)), \quad t \in I.$$

Assim a função de rotação com relação ao ponto fixo  $P_t$  pode ser descrita como

$$\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}(t) = -2 \frac{\sin(\theta(t))}{L}, \quad \forall t \in I.$$

A menos de constante, iremos apresentar a a família de soluções para a EDO acima. Como estamos modelando o problema podemos tomar um valor inicial que nos satisfaça, para tanto iremos chamar  $y(t) = \theta(t)$ , de tal forma que o nosso P.V.I seja descrito pelo sistema

$$\begin{cases} y'(t) = -\frac{\sin(y)}{L}; \\ y(0) = -\frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (6)$$

reorganizando a primeira equação de (6), obtemos

$$\frac{y'(t)}{\sin(y(t))} = -\frac{1}{L}$$

integrando dos dois lados com relação a  $t$ , é verdade que

$$\int \frac{y'}{\sin(y)} dt = -\frac{1}{L} \int dt.$$

A fim de conseguirmos integrar a função acima fazemos uma parametrização, chamemos  $u = \sin(y)$  e  $du = \cos(y)y'dt$ , logo  $\arcsin(u) = y$ , o que transforma a última igualdade em

$$\int \frac{1}{u \cos(\arcsin(u))} du = \frac{1}{L}(-t + C), \quad \text{com } C \in \mathbb{R}$$

resolvendo o lado esquerdo da equação acima, iremos obter

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{u \cos(\arcsin(u))} du &= \int \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} du = \ln \left( \frac{|\sqrt{1-u^2}-1|}{\sqrt{1-u^2}+1} \right) = \frac{2}{L}(-t+C) \\ &= \left( \frac{|\sqrt{1-u^2}-1|}{\sqrt{1-u^2}+1} \right) = e^{\frac{2}{L}(-t+C)} \end{aligned}$$

substituindo de volta  $u = \sin(y(t))$ , sabendo que  $\frac{|\cos(y)-1|}{\cos(y)+1} = \tan\left(\frac{y}{2}\right)^2$ , e escolhendo a constante  $C$  tal que  $e^{\frac{2}{L}(-t+C)} > 0$ , a última igualdade torna-se

$$\tan\left(\frac{y}{2}\right) = \pm e^{\frac{1}{L}(-t+C)}.$$

Sem perda de generalidade<sup>6</sup>, pelo sistema (6), temos  $y(0) = -\frac{\pi}{2}$ , logo

$$-2 \arctan(e^{\frac{2}{L}(C)}) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow e^{\frac{2}{L}(C)} = 1 \Rightarrow C = 0$$

portanto, de fato temos a nossa função  $\theta$  expressa por

$$\theta(t) = -2 \arctan(e^{\frac{2}{L}(-t+C)}), \quad t \in \left[ \theta^{-1}\left(-\frac{3\pi}{4}\right), \theta^{-1}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] \subset I \quad (7)$$

<sup>6</sup>Note que se tomarmos o segundo caso, onde  $y = 2 \arctan(e^{\frac{2}{L}(-t+C)})$ , então  $e^{\frac{2}{L}(C)} = -1$ . Absurdo.

e da equação (2), temos

$$F(t) = -\frac{1}{\sin(2 \arctan(e^{\frac{-t}{L}}))}, \quad t \in \left[ \theta^{-1} \left( -\frac{3\pi}{4} \right), \theta^{-1} \left( \frac{\pi}{4} \right) \right] \subset I. \quad (8)$$

Mais uma vez existe uma identidade trigonométrica interessante que pode nos auxiliar, teremos

$$\sin \left( \arctan \left( -\frac{t}{L} \right) \right) < 0 \text{ e } \cos \left( \arctan \left( -\frac{t}{L} \right) \right) > 0, \quad t \in \left[ \theta^{-1} \left( -\frac{3\pi}{4} \right), \theta^{-1} \left( \frac{\pi}{4} \right) \right]$$

e conseqüentemente, a expressão acima se reduz a:

$$\begin{aligned} F(t) &= -\frac{1}{\sin(2 \arctan(e^{\frac{-t}{L}}))} = -\frac{1}{2[\sin(\arctan(\frac{-t}{L})) \cos(\arctan(\frac{-t}{L}))]} \\ &= -\frac{1 + e^{\frac{2t}{L}}}{2e^{\frac{-t}{L}}} = -\frac{e^{\frac{t}{L}} + e^{\frac{-t}{L}}}{2} = -\cosh \left( \frac{t}{L} \right) \end{aligned}$$

logo, o formato da estrada deve obedecer

$$F(t) = -\cosh \left( \frac{t}{L} \right). \quad (9)$$

#### 4. Wilma, CHEGUEI!

Por fim, conseguimos a resposta para nosso amigo pré-histórico. Sabemos que a função (9) é o gráfico de uma figura chamada **catenária**, ou seja, a estrada terá de ser feita de várias catenárias subsequentes, com um período de  $\frac{\pi}{2}$  devido ao ângulo interno do polígono [2]. Tendo a resposta, voltamos para ver os *Flintstones* com um esboço do projeto, todo caracterizado tentei explicar a ele o formato - aproximado - da estrada ideal para um passeio com a rua quadrada, segue a imagem do projeto final:



**Figura 8:** Projeto final com a rua “especial” em forma de catenária da família Flintstone em frente a sua casa.

Caso o leitor tenha ficado curioso para o formato da rua triangular o processo de construção é o mesmo, porém envolve uma construção mais delicada devido ao ângulo interno de um polígono triangular. Também convém dizer que a construção da estrada se deu em função da roda. Pois, historicamente a roda veio antes da estrada, na realidade primeiramente foi usada para manuseio de ferramentas, como na criação de vasos de cerâmica e posteriormente para locomoção [1].

#### REFERÊNCIAS

- [1] Jan Albert Bakker, Janusz Kruk, Albert E. Lanting, and Sarunas Milisauskas. The earliest evidence of wheeled vehicles in europe and the near east. *Antiquity*, 73(282):778–790, 1999.
- [2] Maria Carvalho and Ana Oliveira. Estradas para Rodas Exóticas. 65, 2011.
- [3] Elon Lages de Lima. Curso de análise, vol 1, 11a edição. *Rio de Janeiro, Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada*, 2004.
- [4] Leon Hall and Stan Wagon. Roads and Wheels. *Mathematics Magazine*, 65(5):283, dec 1992.