Quando sequências caracterizam fechados

Vinicius de Oliveira Rodrigues
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
vinior@outlook.com.br

Resumo

Motivados pelas caracterizações por sequências de abertos e fechados em espaços métricos, definiremos a noção de espaço topológico sequencial, e mostraremos que estes espaços podem ser caracterizados como quocientes de espaços completamente metrizáveis.

1. Introdução

Em espaços métricos, é amplamente utilizado o fato de que conjuntos fechados são bem determinados por sequências. Ou seja, se M é um espaço métrico, então um subconjunto $F \subseteq M$ é fechado se, e somente se, para todo $x \in M$ e para toda sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em F, se $s_n \to x$ então $x \in F$. Tal propriedade aparece com frequência em disciplinas como análise real, complexa e cálculo, afinal, $\mathbb{R}^n$ é um espaço métrico e, em qualquer ocasião que se encontra um espaço métrico, esta propriedade está a disposição. Em qualquer lugar em que os espaços em questão sejam metrizáveis, como por exemplo no estudo de variedades diferenciáveis, espaços de Hilbert e de Banach, esta propriedade também está presente. Sendo esta uma propriedade topológica útil e bastante utilizada, vale a pena dar um nome aos espaços que a satisfazem. Estes espaços são chamados de **espaços sequenciais**. Porém, nem todo espaço topológico é sequencial, mesmo assumindo outras propriedades topológicas boas, como por exemplo a de Hausdorff e a compacidade. Para ilustrar este fato, mais adiante, mostraremos um exemplo de espaço de Hausdorff que não é sequencial.

Quem seriam então os espaços sequenciais? Esses espaços são todos metrizáveis? Se não, será que eles tem alguma outra caracterização? Qual a relação desses espaços com espaços metrizáveis? Veremos que a resposta da primeira pergunta é negativa. Para as outras duas perguntas, nós iremos caracterizar estes espaços como quocientes de espaços metrizáveis. Tal teorema, provado no artigo [Fra65] estabelece uma ligação forte entre os espaços sequenciais e os espaços métricos, fato curioso, pois, como mencionamos, espaços métricos inspiram a definição de espaços sequenciais.

Como pré-requisitos, espera-se que o leitor possua familiaridade com a definição de topologia, abertos, fechados, bases, funções contínuas e limites de sequências, além de familiaridade com as noções básicas de espaços métricos.

Após a leitura deste artigo, o leitor que quiser continuar estudando estes espaços pode seguir com seus estudos através dos artigos [Fra65] e [Fra67].

2. Espaços Sequenciais

Iniciaremos esta seção definindo oficialmente o significado de espaço sequencial. Como motivamos na introdução, um espaço sequencial é um espaço topológico que consegue caracterizar, utilizando sequências, os seus fechados ao mesmo modo que espaços métricos o fazem.

Definição 1. *Um espaço topológico X é dito* ***sequencial*** *se para todo $F \subseteq X$, F é fechado se, e somente se, para todo $x \in X$ e para toda sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em F, se $s_n \to x$ então $x \in F$.*

A fim de simplificar um pouco o estudo de espaços sequenciais, é útil definir as noções de conjuntos sequencialmente abertos e de conjuntos sequencialmente fechados.

Definição 2. *Seja X um espaço topológico.*

- *Dizemos que $F \subseteq X$ é sequencialmente fechado se, e somente se para todo $x \in X$ e para toda sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em F, se $s_n \to x$ então $x \in F$*
- *Dizemos que $A \subseteq X$ é sequencialmente aberto se, e somente se para todo $x \in A$ e para toda sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em X, se $s_n \to x$ então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$, $s_n \in A$.*

O leitor habituado a trabalhar com espaços métricos perceberá que estas definições retratam equivalencias das noções de abertos e fechados nestes espaços. Assim, uma forma de pensar nestas definições é um enfraquecimento das noções de abertos e fechados. Um conjunto sequencialmente aberto é um conjunto para o qual as sequências do espaço dão a entender que ele se comporta como um aberto, porém, no geral, não é garantido que o conjunto é aberto. Dito isso, não é difícil imaginar interpretações análogas sobre a noção de os conjuntos sequencialmente fechado.

A seguinte proposição enuncia alguns fatos básicos de fácil demonstração sobre estes conceitos e o leitor pode tentar prová-los a fim de melhor se acostumar com estes.

Proposição 1. *Seja X um espaço topológico e $B \subseteq X$. Então:*

a) B é sequencialmente aberto se, e somente se $X \setminus B$ é sequencialmente fechado,

b) B é sequencialmente fechado se, e somente se $X \setminus B$ é sequencialmente aberto,

c) Se B é fechado, então B é sequencialmente fechado,

d) Se B é aberto, então B é sequencialmente aberto.

Utilizando a definição de sequencialmente fechado, a definição de espaço sequencial pode ser reescrita como na proposição abaixo:

Proposição 2. *Seja X um espaço topológico. Então X é sequencial se, e somente se, para todo $F \subseteq X$, F é fechado se, e somente se, F é sequencialmente fechado.*

E utilizando as proposições anteriores, segue a seguinte caracterização:

Proposição 3. *Seja X um espaço topológico. São equivalentes:*

a) X é sequencial,

b) Todo subconjunto sequencialmente fechado de X é fechado,

c) Todo subconjunto sequencialmente aberto de X é aberto.

Demonstração. $a) \to b)$ decorre imediatamente da proposição anterior, e $b) \to a)$ decorre da proposição anterior além do fato de que fechados são sempre sequencialmente fechados.

Para $b) \to c)$, suponha que todo subconjunto sequencialmente fechado de X é fechado e fixe A sequencialmente aberto. Temos que $X \setminus A$ é sequencialmente fechado, e, portanto, fechado. Assim, A é aberto. A implicação $c) \to b)$ é análoga. $\square$

Antes de procedermos, daremos como exemplo uma classe de espaços sequenciais mais ampla do que a dos espaços metrizáveis. Lembremos da definição de espaço **primeiro enumerável**.

Definição 3. *Seja X um espaço topológico e $x \in X$. Uma base local de x é uma coleção $\mathcal{B}$ de vizinhanças abertas de x tal que para toda vizinhança aberta U de x existe $A \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset U$.*

Dizemos que X é primeiro enumerável se para todo ponto de x existe uma base local enumerável.

Note que todo espaço metrizável é primeiro enumerável, pois fixada uma métrica, o conjunto das bolas de raio $\frac{1}{n}$ em torno de um ponto é uma base local enumerável para este ponto. Inclusive, os espaços métricos podem ser novamente utilizados para inspirar a definição desta propriedade, pois podemos imaginar uma sequência de abertos da base local diminuindo ao redor do ponto, assim como funcionam as bolas em um espaço métrico. Porém, uma base local nem sempre precisa ser uma sequência encaixada de abertos, diferente do que ocorre com as bolas. Apesar disso, sempre que existe uma base local enumerável, existe uma base local encaixada, tornando a intuição mais próxima da que ocorre em espaços métricos. Dizemos que uma coleção de conjuntos $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ é encaixada se para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} \subset A_n$. Note que isso é equivalente a dizer que para todos $n, m \in \mathbb{N}$, se $n \leq m$ então $A_m \subset A_n$.

Proposição 4. *Seja X um espaço topológico, $x \in X$ e suponha que x admita uma base local enumerável. Então existe uma base local enumerável encaixada.*

Demonstração. A ideia da demonstração é fixar uma base enumerável e tomar interseções finitas de seus conjuntos para forçar que a sequência assim formada seja encaixada. Formalmente, seja $\mathcal{B} = \{B_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base local enumerável para x. Para cada n, seja $A_n = \bigcap_{m \leq n} B_m$. Temos que cada A_n é um aberto, pois é uma interseção finita de abertos e que $x \in A_n$, e é imediato que $A_{n+1} \subset A_n$. Para ver que $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \omega\}$ é uma base, resta ver que dado $U \subset X$ existe n tal que $A_n \subset U$. Para ver isso, basta observar que existe n tal que $B_n \subset U$, logo, $A_n \subset B_n \subset U$. □

É verdade que todo espaço primeiro enumerável é sequencial, assim, obtemos uma grande gama de exemplos de espaços sequenciais. A ideia da prova é a de que se tomarmos uma base local encaixada $\mathcal{A} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de x e, em cada aberto A_n, escolhermos um ponto x_n, então a sequência $(x_n : n \in \mathbb{N}\}$ deve convergir para x, já que a sequência A_n está, intuitivamente "encolhendo para x".

Proposição 5. *Seja X um espaço topológico. Se X é primeiro enumerável, então X é sequencial.*

Demonstração. Pela contrapositiva do item b) da Proposição 3, basta mostrar que se F não é fechado então F não é sequencialmente fechado. Suponha que F não é fechado e fixe $x \in \operatorname{cl} F \setminus F$. Seja $\mathcal{B} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma base local enumerável encaixada para x. Como $x \in \operatorname{cl} F$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in F \cap A_n$. Veremos que $x_n \to x$, o que mostra que F não é sequencialmente fechado. Com efeito, tome U vizinhança aberta de x. Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_N \subset U$. Se $n \geq N$, temos que $a_n \in A_n \subset A_N \subset U$, assim, segue a tese. □

Para finalizar a seção, vamos dar um exemplo de espaço não sequencial, o que mostra que nem todo espaço possui esta propriedade mesmo que eles possuam propriedades topológicas boas, como a propriedade de Hausdorff. Lembremos que um espaço X **é de Hausdorff** se dados $x, y \in X$ existem U, V abertos tais que $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.

Proposição 6. *Existe um espaço topológico Hausdorff que não é sequencial.*

Demonstração. Em $\mathbb{R}$, seja $\sigma = \{\{x\} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \cup \{A \subset \mathbb{R} : 0 \in A \text{ e } \mathbb{R} \setminus A \text{ é enumerável}\}$. Para simplificar a escrita, seja $\sigma_1 = \{\{x\} : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ e $\sigma_2 = \{A \subset \mathbb{R} : 0 \in A \text{ e } \mathbb{R} \setminus A \text{ é enumerável}\}$.

- σ é uma base para uma topologia em $\mathbb{R}$: a interseção de dois elementos de σ_1 resulta em $\emptyset$ ou em um elemento de σ_1. O mesmo vale ao se intersectar um elemento de σ_1 com um de σ_2. Se $A, B \in \sigma_2$, temos que $\mathbb{R} \setminus (A \cap B) = (\mathbb{R} \setminus A) \cup (\mathbb{R} \setminus B)$ é enumerável, portanto, $A \cap B \in \sigma_2$. Finalmente, $\mathbb{R} \in \sigma_2$, logo, $\bigcup \sigma = \mathbb{R}$.

- Esta topologia é Hausdorff: Se $x, y \neq 0$ e $x \neq y$, temos que $\{x\}$, $\{y\}$ são abertos disjuntos. Se $x \neq 0$, temos que $\{x\}$ e $\mathbb{R} \setminus \{x\}$ são abertos disjuntos.

- $\{0\}$ não é aberto, caso contrário, conteria um elemento de σ. Para ver que $\{0\}$ não contém, σ_1 não possui elementos contidos em $\{0\}$, pois se $x \neq 0$ então $\{x\} \not\subset \{0\}$. Se $A \in \sigma_2$ e $A \subset \{0\}$, temos que $A = \{0\}$, e, portanto, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é enumerável, o que é absurdo.

- Porém, $\{0\}$ é sequencialmente aberto: Suponha que $(x_n : n \in \mathbb{N})$ é uma sequência que converge para 0. Seja $F = \{x_n : x_n \neq 0\}$. Temos que $A = \mathbb{R} \setminus F$ é uma vizinhança aberta de 0. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, $x_n \notin F$, logo, $x_n = 0$, logo, $x_n \in \{0\}$.

$\square$

Na proposição acima, utilizamos $\mathbb{R}$ como conjunto base para ser mais fácil de visualizar o exemplo, porém, podemos utilizar, no lugar de $\mathbb{R}$, qualquer X não enumerável, e, no lugar de 0, qualquer $x \in X$.

3. Espaços Quocientes

Lembremos da definição de mapa quociente e de espaço topológico quociente:

Definição 4. *Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \to Y$ uma função sobrejetora. Dizemos que f é uma* ***mapa quociente*** *se, e somente se, para todo $A \subseteq Y$, A é aberto se, e somente se $f^{-1}[A]$ é aberto.*

Se X, Y são espaço topológicos, dizemos que Y é um espaço quociente de X se existe um mapa quociente $f : X \to Y$.

Note que esta definição implica que todo mapa quociente é uma função contínua. Geralmente, Y é uma partição em X, podendo ser definida através de uma relação de equivalência, e f associa um ponto de x ao seu elemento da partição. Dizer que f é um mapa quociente significa dizer, de certo modo, que f está empurrando a topologia de X para Y. Com isso em mente, pode-se perguntar se dada f sobrejetora, sempre é possível empurrar a topologia de X para Y, e, em caso positivo, se isto pode ser feito de forma única. A proposição abaixo responde tais perguntas.

Proposição 7. *Seja X um espaço topológico, Y um conjunto e $f : X \to Y$ uma função sobrejetora. Existe uma única topologia em Y que torna f um mapa quociente.*

Demonstração. Provaremos a existência e a unicidade separadamente.

Existência - Seja $\tau = \{A \subseteq Y : f^{-1}[A] \text{ é aberto}\}$.

- τ é uma topologia: Temos que $X = f^{-1}[Y]$ e $\emptyset = f^{-1}[\emptyset]$ são abertos de X, logo, $\emptyset, Y \in \tau$. Se $A, B \in \tau$, segue que $f^{-1}[A]$ e $f^{-1}[B]$ são abertos de X, logo, $f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B] = f^{-1}[A \cap B]$ é um aberto de X, assim, $A \cap B \in \tau$. Finalmente, se $\{A_i : i \in I\}$ é uma família de elementos de τ, segue que para cada i, $f^{-1}[A_i]$ é aberto, assim, $\bigcup_{i \in I} f^{-1}[A_i] = f^{-1}[\bigcup_{i \in I} A_i]$ é aberto de X, e, portanto, $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$.

- f é um mapa quociente nesta topologia, pois $A \subseteq Y$ é aberto se, e somente se, $f^{-1}[A]$ é aberto pela definição de τ.

Unicidade - Suponha que τ' é uma topologia em Y que torna f um mapa quociente. Temos que

$$A \in \tau' \Leftrightarrow f^{-1}[A] \text{ é aberto em } X \Leftrightarrow A \in \tau.$$

Portanto, $\tau' = \tau$. □

A única topologia em Y que torna f um mapa quociente é denominada **topologia quociente (induzida por f)**.

Uma propriedade boa de espaços sequenciais é que eles são preservados por mapas quocientes. É importante ressaltar que nem toda boa propriedade topológica é preservada por quocientes, como por exemplo, a propriedade de Hausdorff, a normalidade e a propriedade de ter base enumerável não são preservadas. Por outro lado, a compacidade e a conexidade são preservadas.

Proposição 8. *Seja X um espaço topológico. Se X é sequencial, então todo espaço quociente de X também é sequencial.*

Demonstração. Suponha que Y é um espaço quociente de X e fixe $f : X \to Y$ mapa quociente. Queremos ver que Y é sequencial. Para isso, basta mostrar que se $A \subseteq Y$ é sequencialmente aberto, então é aberto. Fixe A sequencialmente aberto. Seja $B = f^{-1}[A]$. Temos que B é sequencialmente aberto: se $x \in B$ e $x_n \to x$, por continuidade segue que $f(x_n) \to f(x)$. Logo, existe N tal que para todo $n \geq N$, $f(x_n) \in A$. Assim, para este mesmo N, se $n \geq N$ então $x_n \in f^{-1}[A] = B$, o que prova que B é sequencialmente aberto. Como X é sequencial, segue que B é aberto. Mas como $B = f^{-1}[A]$ é aberto, segue que A é aberto. □

Antes de prosseguir para a próxima seção, utilizaremos quociente para fornecer um exemplo de um espaço topológico sequencial, Hausdorff que não é primeiro enumerável.

Proposição 9. *Existe um espaço sequencial e Hausdorff que não é primeiro enumerável.*

Demonstração. Em $\mathbb{R}$, considere a partição dada por $P = \{\{x\} : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\} \cup \{\mathbb{Z}\}$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{P}$ a função dada por $f(x) = \{x\}$ se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, e $f(x) = \mathbb{Z}$ caso contrário. Como f é sobrejetora, consideremos em P topologia quociente induzida por f.

- Como $\mathbb{R}$ é sequencial, temos que P é sequencial.
- P é Hausdorff: Precisamos mostrar que podemos separar por abertos pontos do tipo $\{x\}, \{y\}$ com $x \neq y$, $x, y \notin \mathbb{Z}$, e pontos do tipo $\mathbb{Z}$, $\{x\}$, com $x \notin \mathbb{Z}$.

  Note que se $A \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, temos que $f^{-1}[f[A]] = A$. Assim, se I, J são intervalos disjuntos que não intersectam $\mathbb{Z}$ contendo, respectivamente x, y, segue que $f[A], f[B]$ são abertos disjuntos de J contendo respectivamente $\{x\}, \{y\}$.

  Agora suponha que $x \notin \mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ é fechado, existe $r > 0$ tal que $(x - 2r, x + 2r) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Considere $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}(n - r, n + r)$ e $I = (x - r, x + r)$. Temos que $f^{-1}[f[A]] = A$ e $f^{-1}[I] = I$, assim, $f[A], f[I]$ são abertos disjuntos de P contendo $\mathbb{Z}, \{x\}$, respectivamente.
- P não é primeiro enumerável: A ideia é adaptar um argumento diagonal. Suponha que $\mathcal{B}$ é uma coleção enumerável de vizinhanças abertas de $\mathbb{Z}$. Veremos que $\mathcal{B}$ não é uma base local de $\mathbb{Z}$.

  Como $\mathbb{Z}$ é infinito enumerável, podemos escrever $\mathcal{B} = \{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que $n \in f^{-1}[A_n]$ e este é aberto, assim, existe $r_n > 0$ tal que $r < \frac{1}{2}$ e $(n - 2r_n, n + 2r_n) \subset f^{-1}[A_n]$. Seja $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}}(n - r_n, n + r_n)$. Notemos que para cada n, $n + r_n \notin \mathbb{Z}$ e $n + r_n \notin A$. Note que $f^{-1}[f[A]] = A$, logo, $f[A]$ é aberto. temos que para cada n, $A_n \not\subseteq f[A]$, pois $\{n + r_n\} \in A_n \setminus f[A]$.

□

4. Uniões Disjuntas

O conceito de união disjunta será muito importante para provar a nossa caracterização dos espaços sequenciais. Começaremos com a definição de união disjunta de uma família de conjuntos arbitrária.

Definição 5. *Seja $(X_i : i \in I)$ uma família de conjuntos. A união disjunta desta família é o conjunto $\bigsqcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{i\in I}(X_i \times \{i\})$. Dado $i \in I$, a imersão natural de X_i em $\bigsqcup_{i\in I} X_i$ é a função $\phi_i : X_i \to \bigsqcup_{i\in I} X_i$ dada por $\phi_i(x) = (x, i)$.*

A ideia, naturalmente, é que X_i é identificado dentro da união disjunta com o conjunto $X_i \times \{i\}$ através da função ϕ_i. Quando cada X_i é um espaço topológico, seria desejável colocar na união disjunta uma topologia que preservasse a topologia de cada X_i. Para se ter uma ideia intuitiva do que ocorre, a união disjunta de uma esfera com ela mesma poderia ser visualizada como duas esferas idênticas disjuntas, de modo que a topologia de uma não interfira na topologia da outra. A proposição abaixo garante que isso é sempre possível.

Proposição 10. *Seja $(X_i : i \in I)$ uma família de espaços topológicos, $X = \bigsqcup_{i\in I} X_i$ a sua união disjunta e, para cada i, seja ϕ_i a imersão natural. Então existe uma única topologia em X que torna cada ϕ_i um homeomorfismo na imagem e que torna cada $X_i \times \{i\}$ um aberto.*

Demonstração. **Existência:** Para cada i, seja τ_i a topologia de X_i. Afirmo que o conjunto $\sigma = \bigcup_{i\in I}\{\phi_i[A] : A \in \tau_i\}$ forma uma base para uma topologia em X: primeiramente, note que $X = \bigcup_{i\in I} \phi_i[X_i]\}$, e cada $\phi_i[X_i] \in \sigma$ pois $X_i \in \tau_i$. Agora suponha que $x \in \phi_i[A] \cap \phi_j[B]$ para alguns $i, j \in I$, $A \in \tau_i$, $B \in \tau_j$. Temos que $i = j$, pois do contrário, teríamos que ϕ_i, ϕ_j tem imagens disjuntas. Assim, $x \in \phi_i[A] \cap \phi_j[B] = \phi_i[A \cap B] \in \sigma$ (pois ϕ_i é injetora e $A \cap B$ é aberto).

Seja τ a topologia gerada por σ. Cada $X_i \times \{i\} = \phi_i[X_i]$ é um aberto. Cada ϕ_i é injetora e um mapa aberto. Para ver que ela é contínua, basta mostrar que a imagem inversa de um elemento de σ é umm aberto. Fixe $j \in I$ e $A \in \tau_j$. Se $i \neq j$, então $\phi_i^{-1}[\phi_j[A]] = \emptyset \in \tau_i$. Se $i = j$, então $\phi_i^{-1}[\phi_i[A]] = A \in \tau_i$.

Unicidade: Suponha que τ' é uma topologia que torna cada ϕ_i um homeomorfismo na imagem e que torna cada $X_i \times \{i\}$ um aberto. Seja $A \in \tau'$. Veremos que $A \in \tau$. Fixe $(x, i) \in A$. Basta ver que existe $Y \in \sigma$ tal que $(x, i) \in Y \subseteq A$. Temos que $(X_i \times \{i\}) \cap A \in \tau'$. Como ϕ_i é isomorfismo, temos que $B = \phi_i^{-1}[(X_i \times \{i\}) \cap A] \in \tau_i$. Mas então $A \supseteq (X_i \times \{i\}) \cap A = \phi_i[B] \in \sigma$.

Resta ver que $\tau \subset \tau'$. Basta ver que $\sigma \subset \tau'$. Dado $i \in I$ e $A \in \tau_i$, temos que $\phi_i[A]$ é um aberto na topologia de $X_i \times \{i\}$ induzida por τ'. Mas como este último é um aberto, segue que $\phi_i[A] \in \tau'$. □

Dada uma família $(X_i : i \in I)$ de espaços topológicos, considera-se a (única) topologia acima como sendo a topologia usual na união disjunta $\bigsqcup_{i\in I} X_i$, ficando, assim, subentendido que a topologia neste último é a topologia da proposição anterior sem necessidade de mencionar isso sempre que uma união for efetuada

É verdade que a união disjunta de espaços sequenciais é sequencial, porém para provar o resultado central do artigo (a caracterização de espaços sequenciais como quocientes de espaços métricos), estamos interessados na preservação da metrização completa por uniões disjuntas.

Definição 6. *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência $(x_n : n \in \mathbb{N})$ em M é uma sequência de Cauchy se $\forall \epsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall n, m \in \mathbb{N}\, (m, n \geq N \to d(x_n, x_m) < \epsilon)$. Dizemos que d é uma espaço métrica completa se toda sequência de Cauchy converge. Dizemos que um espaço topológico é completamente metrizável se existe uma métrica d completa em X compatível com a topologia de X.*

Para mostrar que a propriedade de ser completamente metrizável é preservada por uniões disjuntas, primeiro precisamos do seguinte lema, que indicaremos a demonstração e deixaremos os detalhes para o leitor interessado.

Proposição 11. *Seja X um espaço topológico. Se X é completamente metrizável, então existe uma métrica completa d em X compatível com a topologia de X limitada por 1, ou seja, tal que $d(x,y) \leq 1$ para todo $x, y \in X$.*

Demonstração. Sendo d' qualquer métrica completa compatível com a topologia de X, basta tomar d dada por $d(x,y) = \min\{1, d'(x,y)\}$. □

Proposição 12. *Seja $(X_i : i \in I)$ uma família de espaços topológicos, $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ a sua união disjunta e, para cada i, seja ϕ_i a imersão natural. Se cada X_i é completamente metrizável, então X é completamente metrizável.*

Demonstração. Para cada i, pelo lema anterior, existe uma métrica d_i em X_i compatível com a topologia de X_i limitada por 1. Se $(x,i), (y,j) \in X$, define-se:

$$d((x,i),(y,j)) = d_i(x,y), \text{ se } i = j,$$

$$d((x,i),(y,j)) = 1, \text{ se } i \neq j.$$

É claro que $d \geq 0$ e que d é uma função simétrica. A verificação da desigualdade triangular é obtida quebrando-se em casos e fica a cargo do leitor.

Para uma métrica d, denotemos a bola aberta de d de raio r e centro x por $B_r^d(x)$. Para ver que d é compatível com a topologia de X, basta verificar os itens abaixo:

- Dado $(x,i) \in X$ e $r < 1$, $B_r^d(x,i)$ é aberto: para verificar isso, basta notar que $B_r^d(x,i) = \phi_i[B_r^{d_i}(x)]$.
- Dado $A \subseteq X$ aberto e $(x,i) \in A$, existe $r > 0$ tal que $B_r^d(x,i) \subseteq A$: para verificar isso, seja $U = A \cap (X_i \times \{i\})$ e $V = \phi^{-1}[U]$. Segue que $x \in V$, assim, existe $0 < r < 1$ tal que $B_r^{d_i}(x) \subset U$. Segue que $\phi_i[B_r^{d_i}(x)] = B_r^d(x,i) \subseteq U \subseteq A$.

Resta ver que d é completa. Seja (x_n, i_n) uma sequência de Cauchy. Existe N tal que para todos $n, m \geq N$, $d((x_n,i_n),(x_m,i_m)) < 1$. Assim, para todos $n, m \geq N$, temos que $i_n = i_m$. Seja $i = i_N$.

Seja $y_n = x_{n+N}$. Temos que y_n é uma sequência em X_i. Afirmo que ela é uma sequência de Cauchy para d_i. Com efeito, fixe $\epsilon > 0$. Existe $M \geq N$ tal que para todos $n, m \geq M$, $d((x_n,i_n),(x_m,i_m)) < \epsilon$. Assim, se $m, n \geq M - N$, então $m + N, n + N \geq M$, logo, $d_i(y_m, y_n) = d((x_{n+N}, i),(x_{m+N}, i)) < \epsilon$. Assim, existe $y \in X_i$ tal que $y_n \to y$.

Afirmo que $(x_n, i_n) \to (y, i)$. Com efeito, dado $\epsilon > 0$, existe K tal que se $n \geq K$ então $d_i(y_n, y) < \epsilon$. Assim, se $n \geq K + N$, segue que $d((x_n,i_n),(y,i)) = d(x_{n-N}, y) < \epsilon$, o que completa a prova. □

Por fim, enunciaremos uma proposição útil para decidir se uma função é, ou não, contínua.

Proposição 13. *Seja $(X_i : i \in I)$ uma família de espaços topológicos, $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ a sua união disjunta e, para cada i, seja ϕ_i a imersão natural. Seja Y um espaço topológico e $f : X \to Y$. Temos que f é contínua se, e somente se para todo $i \in I$, $f \circ \phi_i$ é contínua.*

Demonstração. Se f é contínua, então cada $f \circ \phi_i$ é contínua pois esta função é uma composição de funções contínuas. Reciprocamente, suponha que para cada i, $f \circ \phi_i$ é contínua. Fixe $(x,i) \in X$. Basta ver que f é contínua em (x,i). Para isso, basta ver que $f|X \times \{i\}$ é contínua, o que é verdade pois $f|X \times \{i\} = (f \circ \phi_i) \circ \phi_i^{-1}$. □

5. Uma Caracterização de Espaços Sequenciais

Vimos que todo espaço metrizável é um espaço sequencial, e vimos que todo quociente de um espaço sequencial é um espaço sequencial. Assim, vimos que todo quociente de um espaço métrico é um espaço sequencial. Veremos que vale a recíproca. Para isso, dado um espaço topológico sequencial X, precisaremos encontrar um espaço completamente metrizável M e um mapa quociente $f : M \to X$. Para construir este espaço topológico, utilizaremos sequências convergentes como os tijolos básicos para fazer uma

Definição 7. *Seja* $S = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ *munido da topologia de subespaço de* $\mathbb{R}$.

S será o nosso tijolo básico de M. S é completamente metrizável pois $\mathbb{R}$, com a métrica usual, é um espaço métrico completo e qualquer subconjunto fechado de um espaço métrico completo também é um espaço métrico completo. Alternativamente, é possível mostrar que se uma subsequência de uma sequência de Cauchy converge, então a sequência inteira converge, e então usar o fato de que se uma sequência em S não possui subsequências constantes, ela possui uma subsequência estritamente decrescente cujo ínfimo é 0, e, portanto, esta subsequência (e a sequência inteira) convergem para 0.

Proposição 14. *Todo espaço sequencial é um quociente de um espaço métrico completo.*

Demonstração. Seja X um espaço sequencial. Defina:

$$I = \{(s, x) : s \text{ é uma sequência em } X \text{ que converge para } x\}.$$

Seja $M = \bigsqcup_{(s,x)} S$. Seja $f : M \to X$ dada por $f(0, (s, x)) = x$, $f(2^{-n}, (s, x)) = s(n)$.

- f é sobrejetora: Dado $x \in X$, sendo s a sequência constante igual à x, temos que $(s, x) \in I$, e $f(0, (s, x)) = x$.

- f é contínua: Fixado (s, x), basta ver que $f \circ \phi_{(s,x)}$ é contínua. Note que $f \circ \phi_{(s,x)}(0) = x$ e $f \circ \phi_{(s,x)}(2^{-n}) = s(n)$. $f \circ \phi_{(s,x)}$ é contínua em 2^{-n} para todo $n \in \mathbb{N}$ pois estes são pontos isolados de S. Resta ver que $f \circ \phi_{(s,x)}$ é contínua em 0. Seja U uma vizinhança aberta de x. Existe N tal que se $n \geq N$ então $s(n) \in U$. Assim, se $a \in S \cap (-2^{-N}, 2^{-N})$, temos que existe $n \geq N$ tal que $a = 2^{-n}$, e portanto $f \circ \phi_{(s,x)}(a) = s(n) \in U$.

- f é um mapa quociente: Suponha que $f^{-1}[A]$ é aberto. Devemos ver que A é aberto. Basta ver que A é sequencialmente aberto. Então fixe $x \in A$ e seja s uma sequência que converge para x. Devemos ver que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ então $s(n) \in A$. Como $f^{-1}[A]$ é aberto e $f(0, (s, x)) \in A$, temos que $(0, (s, x)) \in f^{-1}[A]$. Assim, $0 \in \phi^{-1}_{(s,x)}[f^{-1}[A]] = (f \circ \phi_{(s,x)})^{-1}[A]$, e este último é aberto. Como a sequência 2^{-n} converge para 0, existe N tal que se $n \geq N$ então $2^{-n} \in (f \circ \phi_{(s,x)})^{-1}[A]$. Mas então, se $n \geq N$, $s(n) = f \circ \phi_{(s,x)}(2^{-n}) \in A$, o que completa a prova.

□

6. Agradecimentos

Durante o estudo e produção deste trabalho, o autor foi financiado pela FAPESP (processos 2012/25137-6 e 2015/15166-7).

Referências

[Fra65] S. P. Franklin. Spaces in which sequences suffice. *Fund. Math.*, 57:106–115, 1965.

[Fra67] S. P. Franklin. Spaces in which sequences suffice ii. *Fund. Math.*, 61:51–56, 1967.

[Wil04] S. Willard. *General Topology*. Addison-Wesley series in mathematics. Dover Publications, 2004.