

Soldados de Conway

ÉRIK AMORIM

Rutgers, the State University of New Jersey
erik.amorim@math.rutgers.edu

Resumo

Conway's Soldiers é um jogo simples jogado em um tabuleiro infinito, porém com um objetivo extremamente difícil. Neste artigo explicamos em detalhes a demonstração padrão do quão difícil exatamente este jogo é, utilizando séries infinitas e a razão áurea.

1. REGRAS DO JOGO

O jogo *Conway's Soldiers*, ou *Soldados de Conway*, inventado por John Horton Conway em 1961, é um desafio matemático inspirado no jogo *Resta Um*. O único jogador tem à disposição infinitas peças (seus soldados) e um tabuleiro infinito em todas as direções, mas com uma linha horizontal infinita demarcada. Chamamos as casas acima desta linha de *território inimigo*. Antes de começar a jogar, ele pode escolher em quais casas **abaixo da linha** ele deseja posicionar seus soldados, sendo no máximo um por casa. Aqui segue um exemplo de posicionamento inicial. A linha do inimigo está representada como uma quebra no tabuleiro, e também numeramos as fileiras que aparecem do território inimigo de 1 a 5.

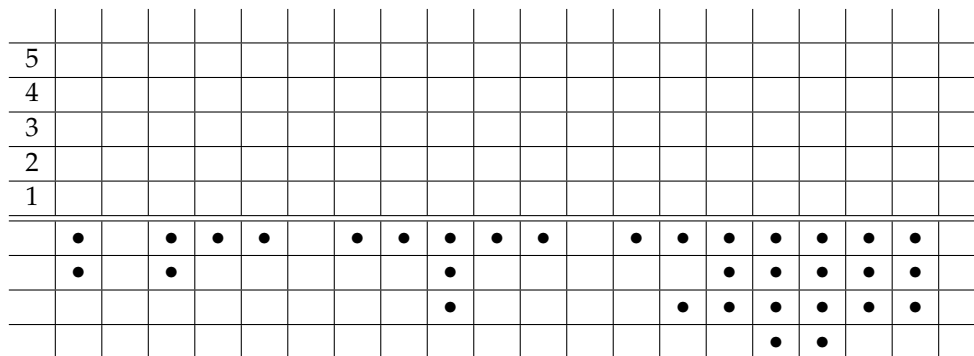


Fig. 1. Um possível posicionamento inicial.

Então o jogo começa: os movimentos permitidos são os mesmos que no *Resta Um*, isto é, um soldado pode pular sobre um soldado adjacente na horizontal ou vertical (mas não na diagonal), desde que a casa seguinte onde ele aterrissará esteja vazia. Esta casa poderá pertencer ao território inimigo ou não, isto não importa. O soldado “comido” é removido do jogo.

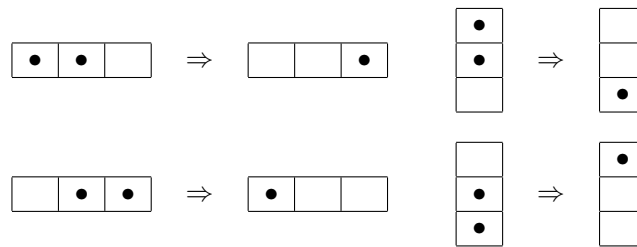


Fig. 2. Os movimentos permitidos. Nos 4 casos o soldado “comido” é o do meio.

O objetivo é atingir com algum soldado uma fileira do território inimigo o mais distante possível da linha demarcada.

O leitor é convidado a jogar algumas partidas neste momento, por exemplo através do website [3], ou qualquer outro aplicativo que encontrar online, para se familiarizar com a mecânica do jogo. Atingir a primeira, segunda e terceira fileira acima da linha do inimigo não é difícil; pode-se ver que são necessários pelo menos 2, 4 e 8 soldados, respectivamente. Atingir a quarta fileira requer um pouco de esforço, e é divertido tentar! Observando-se o aparente padrão no número mínimo de soldados necessários para cada fileira, qualquer um imaginaria que agora precisamos de 16, mas na verdade pode-se provar que o mínimo é 20. Mas se em algum momento o leitor conseguir atingir a quinta fileira do território inimigo, poderá ter certeza que fez algo de ilegal, porque na verdade isto é impossível, não importando a configuração inicial do tabuleiro! Conway demonstrou este fato de uma forma elegante porém elementar, que reproduziremos neste artigo. Para tanto seguiremos as ideias de [1], onde não só este jogo como também algumas variações interessantes são discutidos.

Mas antes disso, precisamos discutir somas infinitas. Ou melhor, somas de infinitos termos.

2. SÉRIES

Uma *série* é uma soma de infinitos números, o que não é o mesmo que dizer *uma soma infinita*. Neste artigo somente discutiremos números estritamente positivos. O leitor que já conhece a teoria de séries, e em especial a *série geométrica*, pode pular esta seção. E o leitor que não a conhece pode estar se perguntando como uma soma de infinitos números positivos pode não ser uma soma infinita. Mas o fato é que, sim, existe uma teoria lógica e intuitiva, geralmente introduzida em uma disciplina de Cálculo II ou III, segundo a qual toda série (de termos positivos) tem uma soma que pode ser ∞ ou um número finito S . No primeiro caso dizemos que a série *diverge*, e caso contrário *converge* a S .

Mas não é necessário entrar em detalhes para começar a compreender esse conceito. Um exemplo de série convergente pode ser obtido com os dígitos de π (ou qualquer outro número irracional): a soma $3 + 0,1 + 0,04 + 0,001 + 0,0005 + \dots$ contém infinitos termos mas é igual a π .

$$\begin{array}{rcl}
 3 & & + \\
 0,1 & & + \\
 0,04 & & + \\
 0,001 & & + \\
 0,0005 & & + \\
 0,00009 & & + \\
 \vdots & & = \pi
 \end{array}$$

Fig. 3. Uma série convergente.

Por outro lado, qualquer série cujos termos são constantes e não-nulos claramente diverge, não importa o quão pequenos esses termos sejam, porque a soma total aumenta sempre à mesma taxa conforme a soma progride, e eventualmente ultrapassa qualquer valor. Mais geralmente, para que uma série tenha qualquer chance de convergir, é necessário que seus termos tendam a zero, isto é, fiquem cada vez menores.

Por outro lado isto nem sempre é fator determinante à convergência, e o exemplo padrão neste caso é o da *série harmônica*

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots \quad (1)$$

Esta soma diverge porque, por exemplo, o terceiro e quarto termos são maiores ou iguais a $1/4$ (logo sua soma é pelo menos $1/2$), os próximos quatro termos são maiores ou iguais a $1/8$ (portanto sua soma é $\geq 1/2$), os próximos oito termos também têm soma pelo menos $1/2$, assim como os seguintes dezesseis, e assim por diante, infinitas vezes, de forma que a série harmônica tem soma maior ou igual a

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty. \quad (2)$$

Mas o exemplo de série do qual precisaremos será o seguinte:

Definição 2.1. Chamamos uma série no formato

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots \quad (3)$$

de série geométrica. Assumimos $a, r > 0$.

Portanto em uma série geométrica cada termo é obtido do anterior multiplicando-o por uma constante r , chamada *razão* da série. Se $r \geq 1$, a série diverge porque seus termos não tendem a zero. Mas se $r < 1$ ela converge (pode-se demonstrar). Em geral existem métodos simples para se determinar que uma série converge, mas é difícil calcular o exato valor da soma. O caso da série geométrica é exceção: um truque muito simples permite calcular a soma! Multiplicamos a série por r e subtraímos o resultado da soma original, assim fazendo com que quase todos os termos se cancelem:

$$\begin{aligned} S &= a + ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots \\ rS &= ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + ar^5 + \dots \\ S(1-r) &= a \end{aligned} \quad (4)$$

Portanto a soma é dada por

$$S = \frac{a}{1-r}. \quad (5)$$

Vale ressaltar que este truque só funciona se $r < 1$, porque nesse caso sabemos que a soma é um número finito. Do contrário, estaríamos subtraindo ∞ de ∞ , o que não faz sentido (é até pior do que dividir por zero!).

Um exemplo simples de série geométrica convergente é

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots = 1. \quad (6)$$

A soma 1 é obtida de (5) com $a = r = 1/2$. E isto faz todo o sentido: se eu como metade de uma pizza, depois você come metade do que sobrou ($1/4$ do todo), depois eu como metade do que sobrou ($1/8$ do todo), depois você come metade do que sobrou, e assim por diante, ao final de infinitos passos teremos comido a pizza inteira!

3. IMPOSSIBILIDADE DE SE ATINGIR A FILEIRA 5

Dois números que surgirão naturalmente em nossos cálculos serão

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \quad \text{e} \quad \Phi = 1/\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \quad (7)$$

isto é, a *razão áurea* φ e seu inverso Φ . O segundo será mais importante. Além do fato de que $\Phi \in (0, 1)$, será útil saber também que

$$\begin{aligned} 1 - \Phi &= \Phi^2 \\ 1 + \Phi &= \frac{1}{\Phi} \end{aligned} \quad (8)$$

conforme o leitor poderá demonstrar na privacidade de sua casa! (Observe que a segunda fórmula é simplesmente um múltiplo da primeira, por exemplo.)

Teorema 3.1. *Se na configuração inicial do tabuleiro existe somente uma quantidade finita de soldados, é impossível atingir a fileira 5 do território inimigo.*

Demonstração. Escolha uma casa qualquer na fileira 5, e dê a ela o nome C . Provaremos que é impossível atingi-la. Escolha também um número $x \in (0, \infty)$, a ser determinado posteriormente, e atribua pesos a cada casa do tabuleiro, de acordo com a figura que segue:

	x^3	x^2	x^1	1	x^1	x^2	x^3	
	x^4	x^3	x^2	x^1	x^2	x^3	x^4	
	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	
	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6	
	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7	
	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	
	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	
	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	

Fig. 3. Distribuição de pesos. A casa de peso 1 é C . Dizemos que esta distribuição está centrada em C . Os pesos seguem este padrão infinitamente para baixo e para os lados, mas não é necessário defini-los para casas acima de C .

Dada uma distribuição de soldados nas casas, definimos o *valor* do tabuleiro como a soma dos pesos de cada casa que esteja ocupada. Também damos o nome de S à soma dos pesos de todas as infinitas casas abaixo da linha do inimigo, ocupadas ou não. Claro, essa soma depende de x , e tem muitos e muitos termos, mas sabemos que, ao contrário das aparências, pode acabar sendo um número pequeno, afinal séries podem convergir.

Metade do truque será escolher x tal que $S \leq 1$. Com essa escolha, o valor de qualquer configuração inicial (com uma quantidade finita de soldados abaixo da linha do inimigo) é estritamente menor que $S \leq 1$, enquanto que o valor de uma configuração em que a casa C esteja ocupada é pelo menos 1 (afinal pode ainda haver outros soldados no tabuleiro contribuindo com os pesos de suas casas). Ou seja, **o valor de qualquer configuração inicial é sempre estritamente menor que o valor de qualquer configuração com a casa C ocupada.**

Agora a outra metade do truque será escolher x de forma que uma outra propriedade seja satisfeita: o valor do tabuleiro nunca deverá aumentar quando um movimento válido é realizado. Assim **nunca poderemos atingir uma configuração de valor estritamente maior do que o valor inicial**. Junte-se a isto a frase destacada no parágrafo anterior, e o teorema estará provado!

O resto são cálculos simples para determinar x que satisfaz as propriedades acima. Começamos pela propriedade de que o valor do tabuleiro nunca deve aumentar. Qualquer movimento legal libera duas casas do tabuleiro e ocupa uma outra casa anteriormente vazia, portanto substitui dois termos por um na soma que representa o valor total do tabuleiro. Agora examine as figuras 2 e 3. Pode-se ver que o efeito de mover legalmente **para baixo** uma peça inicialmente em uma casa qualquer de peso x^j é o de substituir

$$x^j + x^{j+1} \text{ por } x^{j+2}, \quad (9)$$

logo vamos querer que x satisfaça $x^{j+2} \leq x^j + x^{j+1}$. Podemos dividir por x^j sem alterar o sinal de desigualdade e obter uma desigualdade do segundo grau, resolvida pela fórmula de Bhaskara. A solução, para $x > 0$, é

$$x \leq \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = \varphi. \quad (10)$$

Analogamente, o efeito de mover uma peça **para cima** é o de substituir

$$x^j + x^{j-1} \text{ por } x^{j-2}, \quad (11)$$

e a resolução da desigualdade desejada agora é

$$x \geq \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \Phi. \quad (12)$$

A análise dos movimentos realizados na horizontal é a mesma, e vê-se que não acrescenta restrições ao valor de x diferentes de (10) e (12). Assim sabemos que estamos restritos a escolher x tal que

$$\Phi \leq x \leq \varphi. \quad (13)$$

Mas ainda precisamos que a soma S dos pesos de todas as infinitas casas abaixo da linha do território inimigo seja no máximo 1. Na esperança de atingir este objetivo, vamos escolher para x o menor valor possível:

$$x = \Phi. \quad (14)$$

Agora calculemos S . Veja novamente a figura 3. Vamos somar os pesos de cada coluna abaixo da linha do inimigo. A coluna onde está a casa C tem sua soma dada como uma série geométrica convergente (de razão $\Phi < 1$). É aqui que precisamos da fórmula (5):

$$\Phi^5 + \Phi^6 + \Phi^7 + \dots = \frac{\Phi^5}{1 - \Phi}. \quad (15)$$

As outras colunas também são séries geométricas, mas com primeiro termo igual a Φ^6 , Φ^7 , etc., e note-se que há duas colunas para cada caso. Portanto, todas juntas, contribuem com a soma:

$$2 \frac{\Phi^6}{1 - \Phi} + 2 \frac{\Phi^7}{1 - \Phi} + 2 \frac{\Phi^8}{1 - \Phi} + \dots \quad (16)$$

Temos assim, de (15) e (16),

$$S = \frac{\Phi^5}{1 - \Phi} + \frac{2}{1 - \Phi} (\Phi^6 + \Phi^7 + \Phi^8 + \dots). \quad (17)$$

Reconhecemos aqui mais uma série geométrica, logo (5) nos fornece

$$S = \frac{\Phi^5}{1-\Phi} + \frac{2}{1-\Phi} \frac{\Phi^6}{1-\Phi} = \frac{\Phi^5(1-\Phi) + 2\Phi^6}{(1-\Phi)^2} = \frac{\Phi^5 + \Phi^6}{(1-\Phi)^2} = \frac{\Phi^5(1+\Phi)}{(1-\Phi)^2}. \quad (18)$$

Tendo em conta as propriedades (8), chegamos em $S = \frac{\Phi^5 \cdot \frac{1}{\Phi}}{(\Phi^2)^2} = 1$.

Conseguimos! E passou raspando: a escolha do menor valor possível para x faz com que S seja exatamente 1, o que era o máximo que poderíamos admitir. Qualquer outro valor de x aumentaria S , e a demonstração não funcionaria. Mas assim está bom, o teorema está provado. ■

Mas espere! Está provado? Talvez seja possível atingir não a casa C, mas alguma outra casa da fileira 5? Afinal, essas outras casas têm peso menor que 1. Mas não se confunda; nós escolhemos C arbitrariamente e provamos que não é possível atingi-la. Da mesma forma não será possível atingir nenhuma outra casa na fileira 5, bastando para isso redefinir os pesos como centrados agora nessa outra casa.

4. EXTENSÕES

Se movimentos na diagonal também são permitidos, é muito simples atingir a fileira 5 (exercício para o leitor). Mas mesmo neste caso existe uma fileira que será sempre impossível de se alcançar, fato que pode ser demonstrado de maneira similar ao que fizemos aqui. Deixamos essa demonstração também como exercício.

A extensão mais interessante deste jogo surge quando analisamos mais de perto a demonstração. Sabíamos que o valor de qualquer configuração inicial seria estritamente menor que 1 porque estávamos assumindo apenas um número finito de soldados. Mas e se fossem infinitos? Mais precisamente, se tivéssemos um soldado em cada casa abaixo da linha, o valor inicial seria 1 e a demonstração não funcionaria. Neste caso, com $x = \Phi$, é simples ver através de (9) e (11) e das propriedades (8) que qualquer movimento na vertical **para cima** ou na horizontal **em direção à casa C** não altera o valor do tabuleiro, enquanto que outros movimentos diminuem este valor. Ou seja, se queremos atingir C neste cenário, talvez seja possível, desde que os movimentos sejam todos para cima ou em direção a C.

No artigo [2], é demonstrado que, de fato, neste cenário é possível atingir a fileira 5! E sabemos devido a nossa demonstração que ao final sobrá apenas um soldado no tabuleiro, do contrário o valor seria maior que 1. Portanto todos os infinitos soldados deverão ser utilizados para que apenas um possa chegar a C! Mas justamente por isso é preciso axiomatizar certos movimentos do jogo com mais cuidado: afinal, se precisamos utilizar todos os soldados, como podemos trazer um soldado “do infinito” para perto da linha do inimigo? A resposta não é difícil, apenas requer criatividade!

REFERÊNCIAS

- [1] Niculescu F., Niculescu R. *Solitaire army and related games*, 2006. Disponível em http://www.cs.cmu.edu/~stefann/papers/math_reports_2006.pdf. [Acesso em 25/05/2017]
- [2] Tatham S., Taylor G. *Reaching row five in solitaire army*, 2009. Disponível em <http://tartarus.org/gareth/maths/stuff/solarmy.pdf>. [Acesso em 25/05/2017]
- [3] <http://www.cleverlearning.co.uk/blogs/blogConway.php>. [Acesso em 25/05/2017]