

Calculando π com colisões

FELIPE RUSSMAN

Universidade Federal do Rio Grande do Sul

russman@ufrgs.br

Resumo

O presente artigo explora um experimento mental com o qual é possível obter, em tese, o número π com qualquer precisão desejada. O método consiste em contar um número máximo de colisões unidimensionais sucessivas. Mostra-se que tal número é um inteiro formado pelos primeiros algarismos de π . Foram usados princípios básicos de mecânica clássica para modelar as colisões e, para contá-las, álgebra linear e trigonometria.

1. O PROCESSO DE COLISÕES SUCESSIVAS

Desde a antiguidade, o número π coleciona muitos admiradores. É um daqueles números que surgem em diversas áreas do conhecimento e têm várias aplicações. Existe um *hobby* de calcular com precisão um conjunto máximo de suas infinitas casas decimais. Muitos métodos eficientes foram desenvolvidos ao longo da história para tal feito, impulsionando a pesquisa como subproduto. O atual recorde do cálculo de casas decimais de π pertence a Ed Karrels que, em 2014, quando ainda era estudante de mestrado em engenharia computacional na Universidade de Santa Clara, na Califórnia, calculou os dez primeiros quadrilhões de algarismos de π [1, 2].

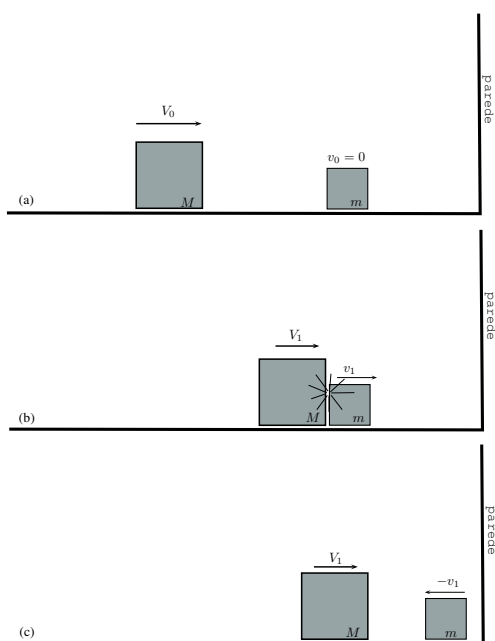


Figura 1.1

Não vamos tão longe, mas o presente artigo explora um sistema de colisões unidimensionais binárias que, surpreendentemente, tem como número máximo de colisões os primeiros algarismos de π . O sistema é o seguinte: tome dois blocos não deformáveis apoiados sobre uma superfície idealizada sem atrito. Coloque-os lado a lado sobre esta superfície e encerre-a com uma parede rígida à esquerda ou à direita de ambos os blocos. Tal situação é exemplificada na Figura 1.1, onde identificamos os blocos com as letras M e m que também indicam as suas massas (valendo sempre $m \leq M$). Escolhemos posicionar a parede à direita dos blocos.

Inicialmente, o bloco de massa M move-se com velocidade V_0 indo ao encontro do bloco de massa m , que está em repouso. Esta situação inicial é mostrada no quadro (a) da Figura 1.1. Os blocos colidirão elasticamente, isto é, além da conservação do *momentum* linear, a energia cinética total do sistema também será conservada.

Considerando estritamente $M > m$, na primeira colisão - quadro (b) da Figura 1.1 - o bloco de massa M , que nesse caso pode ser referido como o bloco maior, segue a mover-se para a esquerda, porém com velocidade de magnitude V_1 tal que $V_1 < V_0$. Adiante é mostrado que no caso em que $M = m$ o bloco M , na verdade, entra em repouso após essa primeira colisão.

De qualquer maneira ($M = m$ ou $M > m$), o bloco m recém animado adquire velocidade positiva (para a direita) de magnitude v_1 . A próxima colisão, igualmente elástica, ocorrerá entre o bloco m e a parede. Tal colisão tem o efeito de inverter o sentido da sua velocidade, mas sem afetar a magnitude (Figura 1.1(c)). É uma reflexão. Dessa maneira, o bloco m passa a mover-se ao encontro do bloco M para uma nova colisão. Mais uma vez colidirão elasticamente. Se $m < M$, todo o argumento se repete dando continuidade ao processo de colisões sucessivas.

Tal processo, como será discutido no texto, é finito. Ou seja, mostrar-se-á que existe uma condição que garante a ocorrência de uma última colisão, seja ela entre os blocos ou entre o bloco m e a parede rígida.

Estamos interessados em calcular o número máximo de colisões, contabilizando tanto as que ocorrem entre os blocos como as entre o bloco m e a parede.

É intuitivo pensar que o número máximo de colisões depende diretamente das massas M e m dos blocos. Entretanto, como será mostrado no decorrer do texto, tal número depende da razão m/M das massas, e não de cada uma delas individualmente. Antecipadamente, defino agora

$$x = \frac{m}{M}. \quad (1)$$

Esta razão x será crucial para o futuro aparecimento da estrela aqui, o π . Ele se manifestará muito naturalmente quando x for uma potência par do número 10. Ou seja, tomaremos $M = m$, $M = 100 m$, $M = 10.000 m$ e etc. Em síntese, nos concentraremos nos casos em que a razão entre as massas é da forma $x = 10^{-2(N-1)}$.

A escolha do expoente da razão x não é gratuita. Batizaremos o número máximo de colisões de função Π , onde $\Pi(N)$ calcula o número máximo de colisões quando o expoente de x for $-2(N-1)$. Assim sendo, o texto será dedicado a convencer o(a) leitor(a) de que

$$\begin{aligned} \Pi(1) &= 3 \\ \Pi(2) &= 31 \\ \Pi(3) &= 314 \\ \Pi(4) &= 3141 \\ &\vdots \\ \Pi(N) &= 3141592654\dots \end{aligned} \quad (2)$$

ou seja, de que o número máximo de colisões quando $x = 10^{-2(N-1)}$ é um número inteiro cujos N algarismos são os N primeiros algarismos de π .

Este fascinante e intrigante problema foi proposto e resolvido por um professor de uma universidade no Illinois, nos Estados Unidos, em Dezembro de 2003. A solução publicada na época é geométrica e difere da mostrada no presente artigo [3]. Recentemente, este problema veio à tona na rede. Foi assim que tomei conhecimento dele e me interessei a ponto de escrever este artigo. Confira você também! [4]

2. O MODELO DE COLISÕES

Nas próximos parágrafos será oferecido um modelo para simular as colisões. É nosso objetivo final obter uma fórmula que, dado o número n da n -ésima colisão de nosso interesse, calcule

explicitamente as velocidades de ambos os blocos imediatamente após essa colisão.

Através da conservação tanto de energia cinética quanto do *momentum* linear total do sistema podemos prever exatamente quais serão as velocidades V_1 e v_1 de ambos os blocos após a primeira colisão. Na verdade, podemos prever as velocidades após qualquer uma das colisões apenas fazendo valer os princípios de conservação [5].

Embora nula, a velocidade inicial do bloco m é denotada v_0 para que entendamos com clareza como se dá a redistribuição de energia cinética e *momentum* linear entre os blocos a cada nova colisão. A escolha dos subíndices “0” e “1” para as velocidades indica o número da colisão que ejeta tais velocidades. Escolhemos o lado direito da página como sentido positivo de movimento ($V_0 > 0$).

Tratemos primeiramente de entender a colisão que ocorre entre os blocos. As equações que representam a conservação de energia cinética e de *momentum* linear na primeira colisão são

$$\frac{1}{2}MV_0^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}MV_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \quad (3)$$

e

$$MV_0 + mv_0 = MV_1 + mv_1. \quad (4)$$

A reunião das equações (3) e (4) forma um sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{cases} V_1^2 + x v_1^2 = V_0^2 + x v_0^2 \\ V_1 + x v_1 = V_0 + x v_0. \end{cases} \quad (5)$$

Mesmo não sendo linear, o sistema (5) é de fácil solução. Basta isolar uma das velocidades, V_1 ou v_1 , em uma das equações, substituir na outra e o sistema está resolvido. As soluções são

$$V_1 = \left(\frac{1-x}{1+x} \right) V_0 + \left(\frac{2x}{1+x} \right) v_0, \quad (6)$$

e

$$v_1 = \left(\frac{2}{1+x} \right) V_0 - \left(\frac{1-x}{1+x} \right) v_0. \quad (7)$$

O entendimento da colisão do bloco m com a parede é mais simples, pois se trata apenas de uma reflexão. Ou seja, na segunda colisão, de onde se justifica o subíndice “2”,

$$V_2 = V_1 \quad (8)$$

e

$$v_2 = -v_1. \quad (9)$$

Nas próximas colisões não há nada novo: as equações que as descrevem são as mesmas que as deduzidas acima, bastando uma troca adequada dos índices das velocidades. Desse modo, para calcular as velocidades dos blocos após a n -ésima colisão, basta iterar tais equações um número arbitrário de vezes. Neste sentido, considerar as soluções (6)&(7) e (8)&(9) como resultado de aplicações lineares será um artifício muito útil.

Seja $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^2$ um subconjunto de vetores. As componentes de tais vetores na base canônica guardam as velocidades dos blocos a cada nova colisão, isto é,

$$\mathbb{U} = \left\{ U_0 = \begin{pmatrix} V_0 \\ v_0 \end{pmatrix}, U_1 = \begin{pmatrix} V_1 \\ v_1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} V_2 \\ v_2 \end{pmatrix}, \dots, U_n = \begin{pmatrix} V_n \\ v_n \end{pmatrix} \right\}, \quad (10)$$

onde U_i será denominado o vetor velocidade do sistema após a i -ésima colisão.

Sejam também os operadores lineares $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cujas representações matriciais na base canônica são, respectivamente, definidas por

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{2} & \frac{2x}{1+x} \\ \frac{1+x}{2} & -\frac{1-x}{1+x} \end{pmatrix} \quad (11)$$

e

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Tomando as restrições dos operadores S e R ao subconjunto \mathbb{U} , ou seja,

$$S|_{\mathbb{U}} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U} \text{ e } R|_{\mathbb{U}} : \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{U},$$

podemos reescrever as soluções (6)&(7) e (8)&(9) utilizando o produto matricial usual. Para simplificar a notação confundiremos $S|_{\mathbb{U}}$ e $R|_{\mathbb{U}}$ com, respectivamente, S e R e teremos

$$U_1 = S U_0 \quad (13)$$

e

$$U_2 = R U_1. \quad (14)$$

Nesse formato, podemos interpretar a matriz S como representante de um operador linear “atualização” (*switch*) de velocidades que opera no sistema toda vez que ocorrer uma colisão **entre os blocos**. E a matriz R modela a reflexão, sendo uma operação que age no sistema quando o bloco m **colide com a parede**. Portanto, podemos usar a aplicação sucessiva de tais matrizes para atualizar facilmente as velocidades dos blocos a cada nova colisão.

Fica da seguinte forma. No início, os blocos têm velocidades guardadas pelo vetor U_0 . Acontece uma colisão entre eles e passam a mover-se com velocidade U_1 , que é, segundo (13), $U_1 = S U_0$. A próxima colisão é a reflexão. Ou seja, $U_2 = R U_1$ que é, na verdade, $U_2 = R (S U_0) = RS U_0$, porque já sabemos calcular U_1 . A próxima colisão acontece entre os blocos. Após essa terceira colisão, guardadas no vetor U_3 , as velocidades serão obtidas atualizando o vetor U_2 com a matriz S : $U_3 = S U_2$. Novamente, como já sabemos calcular U_2 , $U_3 = S(RS U_0) = SRS U_0$. Na quarta colisão, se ocorrer, que será do bloco m com a parede, ficamos com $U_4 = R U_3$ ou $U_4 = R(SRS U_0) = (RS)^2 U_0$. E assim sucessivamente.

Como foi possível notar, a iteração do processo de colisões é feito pelas aplicações sucessivas dos operadores S e R na devida ordem.

Não é difícil nos convenceremos de que

Proposição 2.1. *A velocidade do sistema após uma colisão de número $n \geq 1$, se ocorrer, é*

$$U_n = \begin{cases} (T)^{\frac{n}{2}} U_0 & \text{se } n \text{ for par} \\ S(T)^{\frac{n-1}{2}} U_0 & \text{se } n \text{ for ímpar,} \end{cases} \quad (15)$$

onde o operador linear $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é a composição $T = R \circ S$, i.e, na base canônica,

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1-x}{2} & \frac{2x}{1+x} \\ -\frac{1+x}{2} & \frac{1-x}{1+x} \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Demonstração. Mostraremos a validade da fórmula (15) por indução em n . De fato, para $n = 1$ e $n = 2$ a fórmula (15) se verifica, pois reproduz ambos os resultados (13) e (14). Suponhamos, por hipótese de indução, que a fórmula (15) também se verifica para um dado n . Este n pode ser par ou ímpar. Se par, então a próxima colisão, de número $n + 1$, que é ímpar, ocorre entre os blocos. Assim, $U_{n+1} = S U_n$. Pela hipótese de indução, $U_n = (T)^{\frac{n}{2}} U_0$. Daí,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= S U_n \\ &= S(T)^{\frac{n}{2}} U_0 \\ &= S(T)^{\frac{(n+1)-1}{2}} U_0, \end{aligned}$$

o que concorda com (15), pois $n + 1$ é ímpar. Da mesma forma, se n é ímpar, então a próxima colisão, de número $n + 1$, que é par, é uma reflexão do bloco de massa m . Assim, $U_{n+1} = R U_n$. Pela hipótese de indução, $U_n = S(T)^{\frac{n-1}{2}} U_0$. Daí,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= R U_n \\ &= RS(T)^{\frac{n-1}{2}} U_0 \\ &= (RS)(T)^{\frac{n-1}{2}} U_0 \\ &= T(T)^{\frac{n-1}{2}} U_0 \\ &= (T)^{\frac{(n+1)}{2}} U_0, \end{aligned}$$

o que concorda com (15), pois $n + 1$ é par. ■

A fórmula (15) é o meio do caminho do que queremos. É verdade que nos fornece uma maneira computacional de simular as colisões. Entretanto, não é prática. Por exemplo, se a razão x for tal que possibilite a colisão de número $n = 22$ ocorrer, precisamos calcular T elevada a 11^a potência, i.e, vamos ter que multiplicar a matriz T por si mesma 10 vezes. Felizmente, podemos contornar este desagradável impasse. Faremos isso utilizando o processo de diagonalização, uma maneira de representar a transformação linear T por uma matriz mais simples (diagonal) do que sua versão na base canônica.

3. DIAGONALIZAÇÃO DA MATRIZ T

Se o operador linear T for diagonalizável, então existem números $\lambda_1 \in \mathbb{C}$ e $\lambda_2 \in \mathbb{C}$, os autovalores, e uma base $\{w_1, w_2\}$ de autovetores na qual a representação do operador T é uma matriz diagonal da forma [6, 7]

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

O processo de diagonalização da matriz T nos possibilitará contornar a deficiência da fórmula (15) explicitando o vetor U_n para qualquer n dado de maneira funcional. Isso porque, sendo $P = [w_1 \ w_2]$ a matriz dos autovetores de T , temos ($k \in \mathbb{Z}_+$)

$$T^k = PD^kP^{-1}, \quad \text{com } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}, \quad (18)$$

que é operacionalmente muito mais simples.

O polinômio característico de T é [7]

$$\lambda^2 - \text{Tr}(T)\lambda + \det(T) = \lambda^2 - 2\left(\frac{1-x}{1+x}\right)\lambda + 1,$$

cujas raízes são (uma vez que $x > 0$) os complexos conjugados

$$\lambda_1 = \frac{1-x}{1+x} - i\frac{2\sqrt{x}}{1+x} \text{ e } \lambda_2 = \frac{1-x}{1+x} + i\frac{2\sqrt{x}}{1+x}.$$

Repare que $0 < x \leq 1$ garante tanto a desigualdade $0 \leq \frac{1-x}{1+x} < 1$ como $0 < \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \leq 1$ e, além disso, $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{x}}{1+x}\right)^2 = 1$. Por isso, podemos definir agora um número $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$ satisfazendo

$$\cos \theta := \frac{1-x}{1+x} \text{ e } \sin \theta := \frac{2\sqrt{x}}{1+x}. \quad (19)$$

Daí, segue $\lambda_1 = e^{-i\theta}$, $\lambda_2 = e^{i\theta}$ e obtemos

$$P = \begin{pmatrix} i\sqrt{x} & -i\sqrt{x} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D^k = \begin{pmatrix} e^{-ik\theta} & 0 \\ 0 & e^{ik\theta} \end{pmatrix} \text{ e } P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-i}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{2\sqrt{x}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (20)$$

De fato, verifica-se que $PP^{-1} = P^{-1}P = I^1$ e $PT = PD$. O aparecimento natural do arco θ deve-se, certamente, ao envolvimento geométrico citado anteriormente.

Levando as matrizes (20) na fórmula (18), obtemos

$$T^k = \begin{pmatrix} \cos(k\theta) & \sqrt{x} \sin(k\theta) \\ -\frac{1}{\sqrt{x}} \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}, \quad (21)$$

i.e, as potências inteiras da matriz T . Também, com a definição (19) podemos reescrever a matriz do operador S como

$$S = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sqrt{x} \sin(\theta) \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Tomando as potências apropriadas da matriz T , levando em conta a equação anterior, bem como a **Proposição 2.1**, e tomando $v_0 = 0$ encontramos:

$$\begin{array}{ll} \text{Se } n \text{ é par:} & \text{Se } n \text{ é ímpar:} \\ V_n = V_0 \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right), & V_n = V_0 \cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right), \\ v_n = -\frac{V_0}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{n}{2}\theta\right), & v_n = \frac{V_0}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right). \end{array} \quad (23)$$

A fórmula (23) é a versão da solução das velocidades que queremos obter. Com ela, podemos calcular as velocidades de ambos os blocos após a n -ésima colisão. É com ela que preveremos o resultado principal deste artigo: o aparecimento dos algarismos de π .

¹Denotamos I como a matriz identidade.

4. CARACTERIZANDO O NÚMERO MÁXIMO DE COLISÕES

Uma primeira impressão da fórmula (23) pode sugerir que as colisões ocorrerão indefinidamente. É uma pergunta cuja resposta é crucial para o resultado que buscamos. É necessário, portanto, que nos preocupemos com o domínio de validade da fórmula (23), isto é, para quais valores de n que a sua utilização faz sentido físico?

Por exemplo, repare na expressão para a velocidade do bloco m quando n é par. O sinal negativo é apropriado uma vez que, nas colisões do bloco m com a parede, que são as de número par, a velocidade de ejeção deve ser negativa. Entretanto, por menor que seja o número θ sempre existe um natural n de modo que a função seno será negativa. Isso implicaria em uma velocidade de ejeção positiva do bloco m após a colisão com a parede, o que é um absurdo.

Note que, como (23) é uma implicação das hipóteses do modelo (sintetizadas por (6) e (7)), é suficiente garantir que a n -ésima colisão existe para garantirmos que, para tal valor de n , a fórmula (23) faz sentido físico. Pensando neste sentido, comecemos com as seguintes questões: é garantido (por (6)&(7)) que, escolhido N , ocorrerá uma primeira colisão entre os blocos? E a segunda colisão, do bloco m com a parede, ocorrerá em seguida? E uma terceira? A resposta afirmativa é dada pela

Proposição 4.1. *Para qualquer inteiro $N \geq 1$, ocorrerão, pelo menos, 3 colisões.*

Demonstração. A velocidade inicial do bloco M é $V_0 > 0$. Como convençionamos que o sentido positivo das velocidades é o lado direito da página, o bloco M está indo ao encontro do bloco m que está inicialmente em repouso ($v_0 = 0$). Portanto, inevitavelmente, como estão em movimento retilíneo e uniforme e $V_0 > v_0$, os blocos colidirão pelo menos uma vez.

Das soluções (6)&(7) garantimos que logo após esta primeira colisão, para qualquer $N \geq 1$, as velocidades de ejeção dos blocos são ambas positivas, i.e, $V_1 > 0$ e $v_1 > 0$, e também, $v_1 > V_1$. Como $v_1 > 0$ e a parede permanece imóvel, certamente ocorrerá mais uma colisão.

Até agora, garantimos 2 colisões. Nesta segunda colisão, a velocidade do bloco M não se altera, como discutimos e exibimos em (8). Além disso, a velocidade do bloco m inverte de sentido. Então, como $V_2 = V_1 > 0$ e $v_2 = -v_1 < 0$ os blocos colidirão mais uma vez e, assim, garantimos a terceira colisão. ■

Com a **Proposição 4.1**, escolhido um inteiro $N \geq 1$ qualquer, é seguro utilizar a fórmula (23) para $n = 1, 2$ e 3 . Para $n \geq 4$ não sabemos se, escolhido esse N , faz sentido usá-la porque ainda não garantimos se haverá ou não mais colisões a partir da terceira. A fórmula responde com um par de velocidades a cada nova iteração n , mas reservaremos o termo “colisão” somente àquelas que o sejam de fato.

Intuitivamente, parece razoável que as colisões cessarão quando ambos os blocos, além de estarem afastando-se da parede, o fizerem também entre si. A seguir, investiremos esforços para mostrar que tal situação é possível e implica diretamente que o processo de colisões sucessivas é finito. Visando formalizar o que acabamos de dizer, definiremos um conjunto que nos auxiliará a obter um critério para decidirmos se uma dada iteração realmente se trata de uma colisão.

Fixado $N \geq 1$, seja $\mathcal{F}_N \subset \mathbb{N}$ o conjunto

$$\mathcal{F}_N = \left\{ n \in \mathbb{N}, n \geq 3 \mid V_n < 0, v_n \leq 0 \text{ e } |V_n| \geq |v_n| \right\}. \quad (24)$$

A sua propriedade mais importante é a

Proposição 4.2. *Para qualquer inteiro $N \geq 1$, o conjunto \mathcal{F}_N é não vazio. Além disso, é infinito.*

A demonstração, que é a chave do resultado principal do artigo, peço paciência, será adiada para a página 12. Por enquanto, exploremos as suas consequências mais urgentes tomando-a como verdadeira.

A primeira delas é a

Proposição 4.3. *Se $n \in \mathcal{F}_N$, então a iteração de número $n' > n$ não representa uma colisão.*

Demonstração. Tome $n \in \mathcal{F}_N$. É fato, portanto, que $V_n < 0$ e $v_n \leq 0$ com $|V_n| \geq |v_n|$. Se $V_n < 0$ e $v_n = 0$ (o que dá, automaticamente, $|V_n| > |v_n|$) está claro que não pode haver uma nova colisão, pois enquanto o bloco m atingiu o repouso o bloco M só irá afastar-se dele não havendo, assim, a possibilidade de ocorrência de uma nova colisão entre eles. E, nesse caso, o bloco m , obviamente, não colidirá nenhuma vez mais com a parede porque está em repouso. Agora, se $V_n < 0$ e $v_n < 0$ valendo a condição $|V_n| = |v_n|$, a distância entre os blocos é fixa e não poderá ocorrer mais nenhuma colisão entre eles. Tampouco, nesse caso, o bloco m poderá colidir com a parede, pois sua velocidade é negativa e ele só irá afastar-se dela. Finalmente, se $V_n < 0$ e $v_n < 0$ valendo a condição $|V_n| > |v_n|$, o bloco M só irá afastar-se cada vez mais do bloco m e não há, portanto, a possibilidade de uma nova colisão entre eles. Novamente, como a velocidade do bloco m é negativa, ele só irá afastar-se da parede. Concluimos, assim, que não pode ocorrer mais nenhuma colisão a partir da n -ésima iteração. ■

Segue muito naturalmente da **Proposição 4.2** e da **Proposição 4.3** o

Corolário 1. *O número de colisões é finito.*

Como sempre existe algum $n \in \mathcal{F}_N$ e as iterações de índice $n' > n$ não representam uma colisão, então deve existir um número máximo de colisões. Assim, o número de colisões é finito.

A mensagem deste **Corolário 1** é muito clara: a fórmula (23) só pode ser usada para n em uma progressão aritmética de razão 1 que começa com $n = 0$ e termina com $n = \Pi(N)$, que é o número máximo de colisões fixado N . A partir da última colisão, i.e, para a iteração de índice $n > \Pi(N)$, não faz sentido usá-la pois tal iteração não é uma colisão.

Dito isto, como estamos interessados em determinar o número máximo de colisões, precisamos saber reconhecê-lo mesmo que ainda não saibamos calculá-lo explicitamente.

Um atributo indispensável do número máximo de colisões é a

Proposição 4.4. *Se a colisão de número n for a última, então $n \in \mathcal{F}_N$.*

Demonstração. Faremos a demonstração por absurdo. Suponhamos que a última colisão seja a de número n . Vamos assumir que imediatamente após essa colisão, a velocidade do bloco de massa M ou é positiva ou é nula. Se positiva, o bloco estará aproximando-se da parede rígida e, conseqüentemente, colidirá com o bloco de massa m . Portanto, ocorrerá, pelo menos, mais uma colisão e a n -ésima colisão não pode ser a última. Se nula, eventualmente o bloco de massa m colidirá com ele. Ocorrerá, portanto, pelo menos mais uma colisão e a n -ésima não pode ser a última. Além disso, se a velocidade do bloco de massa m imediatamente após esta n -ésima colisão for positiva, ele estará aproximando-se da parede rígida e, conseqüentemente, colidirá com ela. Portanto, a n -ésima colisão não pode ser a última. Logo, $n \in \mathcal{F}_N$. ■

Finalmente, podemos reconhecer o número máximo de colisões.

Proposição 4.5. *O menor elemento de \mathcal{F}_N é o número máximo de colisões.*

Demonstração. Como \mathcal{F}_N é um subconjunto não vazio dos naturais, possui um menor elemento. Seja $n = \min \mathcal{F}_N$, isto é, n é o menor elemento de \mathcal{F}_N . Então, $\forall n' \in \mathcal{F}_N$ e $n' > n$, a iteração de índice n' não poderá representar uma colisão (**Proposição 4.3**). Assim, n é o único candidato a ser o número da última colisão. Como é garantido que tal número existe (**Corolário 1**) e pertence ao conjunto \mathcal{F}_N (**Proposição 4.4**), então só pode ser este n . ■

5. SIMULAÇÃO DAS COLISÕES

A seguir, exibirei simulações dos três primeiros casos mais simples do processo de colisões. É interessante procurar pelo número máximo de colisões $\Pi(N)$ em casos particulares porque adquirimos mais familiaridade com o processo das colisões e, também, é uma oportunidade de ver a fórmula (23) em funcionamento.

Cada simulação mostrará o comportamento do sistema quando a razão entre as massas for $x = 1$, $x = 0.01$ e $x = 0.0001$ ou, respectivamente, $N = 1$, $N = 2$ e $N = 3$. Nas simulações, usa-se $V_0 = 10$, mas essa escolha é arbitrária e poder-se-ia escolher qualquer outro número preferido. As simulações numéricas podem conter erros de arredondamento, como é comum. Mas, mesmo assim, a precisão é suficiente para acompanhar a evolução das velocidades com qualidade.

Experiência para $N=1$

A primeira experiência (para $x = 1$, ou $N = 1$) é mostrada ao lado na Tabela 5.1. A tabela foi feita implementando computacionalmente a fórmula (23) e exhibe os valores calculados das velocidades para cada nova colisão, contada pelo valor de n .

$x = 1$		
n	V_n	v_n
0	10.0	0.0
1	0.0	10.0
2	0.0	-10.0
3	-10.0	0.0

Tabela 5. 1

Nesse caso, a situação não é tão empolgante, mas é importante considerá-la. Inicialmente, i.e, antes da primeira colisão ($n = 0$) o bloco M move-se com velocidade $V_0 = 10$ indo ao encontro do bloco m . Como têm a mesma massa, na colisão, o bloco M transfere toda sua energia cinética para o bloco m . Assim, para $n = 1$, que é a primeira colisão, o bloco M atinge o repouso e o m passa a mover-se com velocidade $v_1 = 10$. A próxima colisão será do bloco m com a parede. Repare que na linha do $n = 2$ a velocidade do bloco M não muda em relação a da linha anterior, mas a velocidade do bloco m muda de sinal, como sabíamos que deveria ser.

Daí, vem o momento crucial: na terceira colisão (assinalada em azul), o bloco m transfere toda a sua energia cinética de volta para o bloco M e retorna para o repouso. O bloco M passa a afastar-se indefinidamente do bloco m nessa etapa, pois sua velocidade é negativa ($V_3 = -10$) e, em módulo, maior do que a velocidade do bloco m . Ou seja, $n = 3$ é o menor elemento de \mathcal{F}_1 , pois é o primeiro a aparecer na lista que satisfaz as condições $V_n < 0$, $v_n \leq 0$ e $|V_n| \geq v_n$. Conclui-se, então, que quando os blocos têm a mesma massa o número máximo de colisões é exatamente

$$\Pi(1) = 3: \text{ o primeiro algarismo de } \pi.$$

Se desavisadamente continuássemos a usar a fórmula (23) a partir deste momento, identificaríamos os primeiros elementos do conjunto \mathcal{F}_1 como sendo $\mathcal{F}_1 = \{3, 4, 11, 12, 19, 20, 27, 28, \dots\}$ pois os valores calculados de velocidades para estes seriam, respectivamente, $V_n = -10$ e $v_n = 0$. Repare que a sequência formada pelos elementos de \mathcal{F}_1 da maneira bem ordenada em que foram organizados são duas progressões aritméticas intercaladas de razão 8 nos ímpares e nos pares. É previsível que o sejam, tendo em vista que, para $N = 1$, temos $x = 1$ e, então, $\theta = \pi/2$ de onde um período pode ser identificado na fórmula (23), que é $P_1 = 2\pi/(\theta/2) = 2\pi/(\pi/4) = 8$.

Experiência para N=2

A segunda experiência (com $x = 0.01$, ou $N = 2$) é mais interessante. A evolução das velocidades dos blocos é mostrada na Tabela 5.2. A velocidade do bloco maior, de massa M , (desde $n = 0$) vai decrescendo a cada nova colisão de número ímpar.

$x = 0.01$											
n	V_n	v_n	n	V_n	v_n	n	V_n	v_n	n	V_n	v_n
0	10.00	0.00	8	6.98	-71.55	16	-0.23	-99.97	24	-7.32	-68.13
1	9.80	19.80	9	5.43	83.97	17	-2.21	97.51	25	-8.52	52.28
2	9.80	-19.80	10	5.43	-83.96	18	-2.21	-97.51	26	-8.52	-52.28
3	9.21	38.82	11	3.66	93.06	19	-4.10	91.20	27	-9.39	34.37
4	9.21	-38.82	12	3.66	-93.06	20	-4.10	-91.20	28	-9.39	-34.37
5	8.26	56.30	13	1.74	98.46	21	-5.82	81.27	29	-9.88	15.09
6	8.26	-56.30	14	1.74	-98.46	22	-5.82	-81.27	30	-9.88	-15.09
7	6.98	71.55	15	-0.23	99.97	23	-7.31	68.13	31	-9.98	-4.77

Tabela 5. 2

Na colisão de número $n = 14$, finalmente, o bloco menor, de massa m , adquiriu velocidade suficiente (próxima de $10 \times V_0$) para inverter o sentido da velocidade do bloco maior. A partir desse momento, o bloco maior segue com velocidade negativa (claro, a cada colisão o menor só o faz ir mais rápido para a esquerda) e basta que procuremos para qual n a velocidade do bloco m também é negativa e, em módulo, menor do que a do bloco M . Isso acontece pela primeira vez quando $n = 31$, assinalado em azul na Tabela 5.2. Nesse momento, o bloco M afasta-se da parede com velocidade $|V_{31}| = 9.98$ enquanto o menor afasta-se dela com velocidade $|v_{31}| = 4.77$. Ou seja, $n = 31$ é o menor elemento de \mathcal{F}_2 , pois é o primeiro a aparecer na lista que satisfaz as condições $V_n < 0$, $v_n \leq 0$ e $|V_n| \geq v_n$. Concluí-se, então, que quando o bloco maior tem 100 vezes a massa do menor o número máximo de colisões é exatamente

$$\Pi(2) = 31: \text{os dois primeiros algarismos de } \pi.$$

Nesta experiência também se pode, por curiosidade, calcular explicitamente alguns outros elementos do conjunto \mathcal{F}_2 . São eles:

$$\mathcal{F}_2 = \{31, 94, 157, 220, 283, 346, 409, 472, 535, 598, 661, 724, 788, 851, 914, 977, 1040, 1103, 1166, 1229, 1292, 1355, 1418, 1481, 1544, 1607, 1670, 1733, 1796, 1859, 1922, 1985, 2048, 2111, 2174, 2237, 2300, 2364, 2427, 2490, \dots\}.$$

Repare novamente que organizados nesta sequência os elementos de \mathcal{F}_2 parecem ser, agora, uma progressão aritmética de razão 63. Novamente, este número não é por acaso. Se n fosse uma variável contínua, a fórmula (23) teria período $4\pi/\theta$. A parte inteira[8] deste número é, exatamente, 63 porque para $N = 2$, $\theta = \cos^{-1}(99/101) \approx 0.19933$ e, então, $4\pi/\theta \approx 63,0407$. Mas,

tal razão falha em 788, pois $724 + 63 = 787$ e não 788. A razão 63 volta a funcionar para os demais termos, mas torna a falhar em 2364. O que acontece, então, é que a razão 63 funciona para alguns termos em sequência, mas para outros imediatamente adjacentes deve-se somar 64 ao invés de 63.

Experiência para $N=3$

A terceira e última simulação (com $x = 0.0001$, ou $N = 3$) está exibida na Tabela 5.3. São mostrados somente alguns valores de velocidade em sequência.

$x = 0.0001$								
n	V_n	v_n	n	V_n	v_n	n	V_n	v_n
0	10.000	0.000	158	-0.091	-999.950	248	-7.890	-614.4400
1	9.998	19.998	\vdots	\vdots	\vdots	249	-8.011	598.5400
2	9.998	-19.998	201	-4.341	900.822	250	-8.011	-598.5400
3	9.992	39.980	202	-4.341	-900.822	\vdots	\vdots	\vdots
4	9.992	-39.980	\vdots	\vdots	\vdots	309	-9.991	41.6839
5	9.982	59.960	243	-7.640	645.497	310	-9.991	-41.6839
\vdots	\vdots	\vdots	244	-7.640	-645.497	311	-9.997	21.6950
155	0.108	999.941	245	-7.760	630.094	312	-9.997	-21.6950
156	0.108	-999.941	246	-7.760	-630.094	313	-9.997	21.6950
157	-0.091	999.950	247	-7.890	614.440	314	-9.999	-1.6970

Tabela 5.3

Note que a colisão em que o bloco de massa m adquire velocidade suficiente para inverter o sentido da velocidade do bloco de massa M é a de número $n = 157$. (A velocidade do bloco de massa m nesta colisão é quase $100 \times V_0$). A partir daí, a velocidade do bloco M é crescente em módulo.

Na colisão de número $n = 314$ (assinalada em azul) o módulo da velocidade negativa do bloco de massa M supera o módulo da velocidade também negativa do bloco de massa m . Ou seja, $n = 314$ é o menor elemento de \mathcal{F}_3 , pois é o primeiro a aparecer na lista que satisfaz as condições $V_n < 0$, $v_n \leq 0$ e $|V_n| \geq v_n$. Portanto, conclui-se que quando o bloco maior tem 10.000 vezes a massa do menor o número máximo de colisões é exatamente

$$\Pi(3) = 314: \text{os três primeiros algarismos de } \pi.$$

Alguns elementos do conjunto \mathcal{F}_3 são $\mathcal{F}_3 = \{314, 942, 1570, 2199, 2827, \dots\}$. Nesta sequência, a razão parece ser 628, que também é a parte inteira de $4\pi/\theta$ para esse caso, mas falha já em 2199 que é, na verdade, $1570 + 629 = 2199$. O mesmo comportamento que na experiência para $N = 2$ se repete. Para alguns termos em sequência a razão é 628, mas para outros imediatamente adjacentes temos de somar 629 ao invés de 628.

6. O INEVITÁVEL APARECIMENTO DE π

Esta última seção é destinada a demonstrar que, de fato, como fortemente sugerido pela seção anterior, o número máximo de colisões quando a razão entre as massas é $x = 10^{-2(N-1)}$ é dado por um número inteiro cujos N algarismos são os N primeiros algarismos de π .

Mas antes, é tempo de demonstrarmos a **Proposição 4.2**. Eis a

Demonstração. A argumentação consiste em impor as condições que definem o conjunto \mathcal{F}_N exibido em (24) à fórmula (23) e encontrar explicitamente os valores de n que satisfazem as devidas condições. Temos de estar atentos ao fato de que a previsão da fórmula (23) difere se n é par ou se é ímpar. Analisaremos cada caso separadamente.

De $N \geq 1$ fixado podemos calcular x e θ . Começemos, então, procurando por um n par que cumpra

$$V_n < 0 \Rightarrow V_0 \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right) < 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{n}{2}\theta\right) < 0, \quad (25)$$

$$v_n \leq 0 \Rightarrow -\frac{V_0}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{n}{2}\theta\right) \leq 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{n}{2}\theta\right) \geq 0, \quad (26)$$

já que $V_0 > 0$, e

$$|V_n| \geq |v_n| \Rightarrow x \cos^2\left(\frac{n}{2}\theta\right) \geq \sin^2\left(\frac{n}{2}\theta\right).^1 \quad (27)$$

Das condições (25) e (26) concluímos que, se existe tal n , o arco $\frac{n}{2}\theta$ deve pertencer ao 2º quadrante do plano trigonométrico, pois é onde a função cosseno é negativa e a seno positiva ou nula. Caso exista, o número n deve ser, portanto, um natural par compreendido no intervalo

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \frac{n}{2}\theta \leq \pi + 2k\pi \Rightarrow \frac{\pi}{\theta} + \frac{4k\pi}{\theta} < n \leq \frac{2\pi}{\theta} + \frac{4k\pi}{\theta}, \quad (28)$$

onde é necessário que k seja algum inteiro não negativo, pois n é um número natural. Olhando agora para (27) é quase imediato fazermos

$$x \cos^2\left(\frac{n}{2}\theta\right) \geq \sin^2\left(\frac{n}{2}\theta\right) \Rightarrow (x+1) \cos^2\left(\frac{n}{2}\theta\right) \geq 1 \Rightarrow \cos^2\left(\frac{n}{2}\theta\right) \geq \frac{1}{1+x}$$

e, lembrando da identidade $\cos^2\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{\cos(a)+1}{2}$ [9], podemos ainda simplificar para

$$\frac{\cos(n\theta)+1}{2} \geq \frac{1}{1+x} \Rightarrow \cos(n\theta) \geq \frac{2}{1+x} - 1 = \frac{1-x}{1+x} \Rightarrow \cos(n\theta) \geq \cos(\theta). \quad (29)$$

A forma correta de interpretar a expressão (29) é a seguinte: os números $\cos \theta$ e $\sin \theta$ são ambos positivos e com isso garantimos que θ pertence ao 1º quadrante do plano trigonométrico. De (28), sabemos que o arco $n\theta$ deve pertencer ao 3º ou 4º quadrante desse mesmo plano. Entretanto, valendo (29), só nos resta a opção de $n\theta$ pertencer ao 4º, pois no 3º quadrante a função cosseno é negativa e, assim sendo, o número negativo $\cos(n\theta)$ não poderia ser maior do que o número positivo $\cos \theta$, sequer igual.

Daí, a única forma de valer a condição (29) é que o arco $n\theta$ seja, no mínimo, o arco replementar de θ . Ou seja, adicionalmente à (28), deve valer também

$$2k'\pi - \theta \leq n\theta \leq 2k'\pi \Rightarrow \frac{2k'\pi}{\theta} \leq n+1 \leq \frac{2k'\pi}{\theta} + 1, \quad (30)$$

¹ $x, y \in \mathbb{R}^+$, $|x| \geq |y| \Rightarrow x^2 \geq y^2$.

onde k' é um inteiro satisfazendo $k' \geq 1$, pois $n + 1$ é um número natural. Na verdade, em concomitância com (28), a condição (30) implica que k' deve ser um inteiro ímpar da forma $k' = 1 + 2k$, dado $k \geq 0$. De fato, pelo lado esquerdo de (28) temos $\frac{1}{2} + 2k < \frac{\theta}{2\pi}n$ e pelo lado direito de (30) temos $\frac{\theta}{2\pi}n \leq k'$. Ou seja, como k e k' são inteiros,

$$\frac{1}{2} + 2k < \frac{\theta}{2\pi}n \leq k' \Rightarrow k' > \frac{1}{2} + 2k \Rightarrow k' \geq 1 + 2k. \quad (31)$$

Mas, pelo lado direito de (28) temos $\frac{\theta}{2\pi}n \leq 1 + 2k$ enquanto que pelo lado esquerdo de (30) temos $k' - \frac{\theta}{2\pi} \leq \frac{\theta}{2\pi}n$. Ou, como $0 < \theta \leq \pi/2$ implica em $\frac{\theta}{2\pi} \leq \frac{1}{4}$, ficamos com

$$k' - \frac{1}{4} \leq k' - \frac{\theta}{2\pi} \leq \frac{\theta}{2\pi}n \leq 1 + 2k \Rightarrow k' - \frac{1}{4} \leq 1 + 2k \Rightarrow k' \leq 1 + 2k. \quad (32)$$

Assim, de (31) e (32) concluímos que k' deve ser da forma $k' = 1 + 2k$, ou seja, um ímpar.

Dando sequência a nossa análise, para facilitar, denotemos $p = \frac{2k'\pi}{\theta}$. Pode ser que p seja um número natural ou não. Já que $n + 1$ é um número natural, então se p também o for, olhando atentamente para (30), conclui-se que $p = n + 1$ ou $p = n$ (pois $n + 1 = p + 1 \Rightarrow p = n$). Disso, como estamos considerando n um natural par, devemos ter $n = p$ se p é par ou $n = p - 1$ se p é ímpar.

Como mostramos que k' é sempre um ímpar, o caso p par só acontece se N for tal que o número natural $\frac{2\pi}{\theta}$ é par. Se for o caso, todos os naturais da forma $\frac{2\pi}{\theta}(2k + 1)$ são elementos de \mathcal{F}_N . O caso p ímpar, por sua vez, só acontece se N for tal que o número natural $\frac{2\pi}{\theta}$ é ímpar. Se o for, os naturais da forma $\frac{2\pi}{\theta}(2k + 1) - 1$ que serão elementos de \mathcal{F}_N .

A outra situação possível é p não ser um natural. Se isto acontece, então uma solução é $n + 1$ ser a parte inteira de $p + 1$, mas somente se esta for ímpar (donde n será par). Se o for, então¹ $n = \left\lfloor \frac{2k'\pi}{\theta} \right\rfloor$ e podemos garantir que n é par e $n > 3$ porque, como $\theta \leq \pi/2$, então $\frac{2k'\pi}{\theta} \geq 4k' \geq 4$ de onde $n = \left\lfloor \frac{2k'\pi}{\theta} \right\rfloor \geq 4k' \geq 4$.

Se a parte inteira de $p + 1$ não for ímpar, é hora de investigarmos a possibilidade de n ser ímpar. Segue de forma muito semelhante. Fixemos novamente $N \geq 1$ e com ele calculemos x e θ . Procuramos um n ímpar que cumpra

$$V_n < 0 \Rightarrow V_0 \cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) < 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) < 0, \quad (33)$$

$$v_n \leq 0 \Rightarrow \frac{V_0}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) \leq 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) \leq 0, \quad (34)$$

já que $V_0 > 0$, e

$$|V_n| \geq |v_n| \Rightarrow x \cos^2\left(\frac{n+1}{2}\theta\right) \geq \sin^2\left(\frac{n+1}{2}\theta\right). \quad (35)$$

Das condições (33) e (34) concluímos que, caso exista, o arco $\frac{n+1}{2}\theta$ deve pertencer ao 3º quadrante do plano trigonométrico, onde a função cosseno e seno são ambas negativas. Portanto, o número n deve ser um ímpar compreendido no intervalo

$$\pi + 2k\pi \leq \frac{n+1}{2}\theta < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\theta} + \frac{4k\pi}{\theta} \leq n+1 < \frac{3\pi}{\theta} + \frac{4k\pi}{\theta}, \quad (36)$$

¹O símbolo $[a]$ denota a parte inteira de $a \in \mathbb{R}$ [8].

onde $k \geq 0$ um inteiro. Analogamente ao caso em que n era par, de (35) concluímos que

$$\cos((n+1)\theta) \geq \cos(\theta). \quad (37)$$

Agora, de (36), sabemos que o arco $(n+1)\theta$ deve pertencer ao 1° ou 2° quadrante do plano trigonométrico. Entretanto, valendo (37), só nos resta a opção de $(n+1)\theta$ pertencer ao 1° , pois no 2° quadrante a função cosseno é negativa e, assim sendo, o número negativo $\cos((n+1)\theta)$ não poderia ser maior do que o número positivo $\cos\theta$, tampouco igual. Daí, a única forma de valer a condição (37) concomitantemente à (36) é que o arco $(n+1)\theta$ seja, no máximo, congruente ao arco θ . Assim, para $k' \geq 1$,

$$2k'\pi \leq (n+1)\theta \leq \theta + 2k'\pi \Rightarrow \frac{2k'\pi}{\theta} \leq n+1 \leq 1 + \frac{2k'\pi}{\theta}. \quad (38)$$

Repare que o resultado (38) é idêntico ao (30), exceto pelo fato de n ser ímpar. Novamente, pelo mesmo argumento que usamos em (31) e (32), a validade mútua de (36) e (38) implica em $k' = 1 + 2k$. Caso $p = \frac{2k'\pi}{\theta}$ seja um inteiro positivo, temos as soluções $n = p$, se $\frac{2\pi}{\theta}$ for ímpar, ou $n = p - 1$, se $\frac{2\pi}{\theta}$ for par. Caso p não seja inteiro, temos a mesma solução $n = \lfloor \frac{2\pi}{\theta} k' \rfloor$, mas garantido que n é ímpar.

Concluímos, portanto, que em qualquer um dos casos n par ou n ímpar temos as soluções sucessivas $n - 1$ e n associadas a \mathcal{F}_N se $\frac{2\pi}{\theta}$ for inteiro. Caso não seja, as soluções associadas são da forma $n = \lfloor \frac{2\pi}{\theta} (1 + 2k) \rfloor$. Decorre daí que \mathcal{F}_N não é vazio.

Explicitamente, se $\frac{2\pi}{\theta}$ for um inteiro positivo, temos

$$\mathcal{F}_N = \left\{ \frac{2\pi}{\theta} \cdot (2k+1) - 1, k \geq 0 \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{\theta} \cdot (2k+1), k \geq 0 \right\} \quad (39)$$

enquanto que se $\frac{2\pi}{\theta}$ não o for, temos

$$\mathcal{F}_N = \left\{ \lfloor \frac{2\pi}{\theta} \cdot (2k+1) \rfloor, k \geq 0 \right\}. \quad (40)$$

Concluímos, ainda, que o conjunto \mathcal{F}_N também é infinito. De fato, caso $\frac{2\pi}{\theta}$ seja inteiro, há uma bijeção (a saber $n \mapsto n+1$) de \mathcal{F}_N sobre uma parte própria; e o caso $\frac{2\pi}{\theta}$ não sendo inteiro é ainda mais claro, pois para cada escolha $k \geq 0$ existe um elemento de \mathcal{F}_N associado bijectivamente. ■

Com as fórmulas (39) e (40) deduzidas na demonstração somos capazes de construir as seqüências que foram identificadas nas experiências do Capítulo 5. E o melhor: podemos prever exatamente o menor elemento de \mathcal{F}_N , pois basta tomar $k = 0$ em (39) ou (40). O menor elemento de \mathcal{F}_N , isto é, o número máximo de colisões será

$$\Pi(N) = \frac{2\pi}{\theta} - 1, \text{ se } 2\pi/\theta \text{ for um inteiro, ou } \Pi(N) = \left\lfloor \frac{2\pi}{\theta} \right\rfloor, \text{ se } 2\pi/\theta \text{ não o for.} \quad (41)$$

Está claro que o estudo do comportamento de θ com as escolhas de N é o último a ser feito. Apoiados no fato de a razão x ser um número que decresce muito rapidamente com o crescimento de N , simplificaremos a obtenção do número θ em termos de x via sua definição em (19).

Podemos tomar a aproximação [10]

$$\frac{1-x}{1+x} \approx 1-2x. \quad (42)$$

De fato, para $x = 0.01$ a diferença entre o valor exato da fração e da aproximação é da ordem de 10^{-4} , e para $x = 0.0001$ tal diferença é da ordem de 10^{-8} . Com o crescimento de N , o valor da fração (42) fica cada vez mais próximo de 1 e faz com que, pela definição (19), o arco θ , cujo cosseno é esta fração, aproxime-se do arco nulo. Assim, também podemos tomar a aproximação [10]

$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}. \quad (43)$$

Reunindo as aproximações (42) e (43), segue que uma aproximação para o número θ em termos de x (que fica cada vez mais precisa com o crescimento de N) é

$$\frac{\theta^2}{2} = 2x \Rightarrow \theta = 2\sqrt{x} \Rightarrow \theta = 2 \times 10^{-(N-1)}. \quad (44)$$

A aproximação (44) falha miseravelmente para $N = 1$, pois temos $\theta = \pi/2 \approx 1.57$ enquanto ela prevê $\theta = 2$. Mas, para $N = 2$ a fórmula prevê $\theta = 0.2$ enquanto o valor calculado por (19) é, aproximando, $\theta = 0.199337$. Isso representa um erro percentual menor do que 0.34%. Dessa forma, a aproximação (44) é muito boa já no segundo caso mais simples. Podemos acompanhar graficamente esta aproximação. Na Figura 6.1 são contrastados os gráficos de $\cos^{-1}(\frac{1-x}{1+x})$ e $2\sqrt{x}$. De fato, a medida que N cresce, i.e, a medida que x se aproxima de 0, as curvas confundem-se até que ficam praticamente indistinguíveis.

Usando, então, a aproximação (44) calculamos

$$\frac{2\pi}{\theta} = \begin{cases} 4 & , \text{se } N = 1 \\ \pi \times 10^{N-1} & , \text{se } N > 1 \end{cases}$$

e de onde, atualizando (41), concluímos que

$$\Pi(N) = \min \mathcal{F}_N = \begin{cases} 3 & , \text{se } N = 1 \\ \lfloor \pi \times 10^{N-1} \rfloor & , \text{se } N > 1. \end{cases} \quad (45)$$

Portanto, para $N \geq 1$, o número máximo de colisões do sistema é a parte inteira do número

$$\pi \times 10^{N-1}$$

que é, exatamente, o inteiro positivo cujos N algarismos são os N primeiros algarismos de π !

7. COMENTÁRIOS FINAIS

Um último comentário acerca das razões das sequências que surgiram nas experiências quando calculamos explicitamente \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 e \mathcal{F}_3 . Em posse das fórmulas (39) e (40) é possível prever

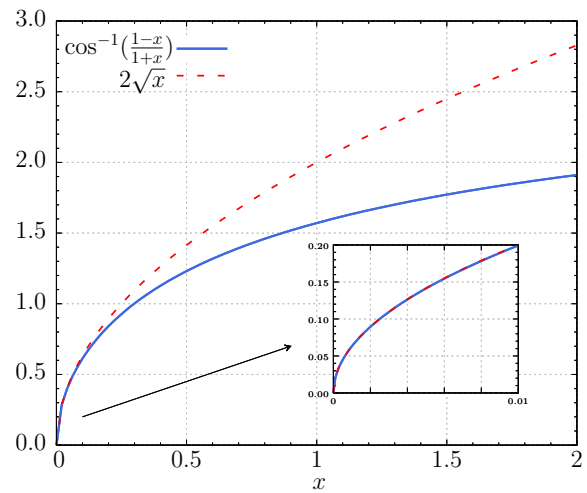


Figura 6.1: Comparação dos gráficos das funções $\cos^{-1}(\frac{1-x}{1+x})$ e $2\sqrt{x}$ no intervalo $0 < x < 2$.

o comportamento que foi chamado a atenção. Para o caso $N = 1$, temos $\frac{2\pi}{\theta} = 4$. Assim, os elementos ímpares de \mathcal{F}_1 são todos da forma $n_k = 8k + 3$ e os pares da forma $n_k = 8k + 4$ donde, é claro, formam uma progressão aritmética de razão 8.

Já para \mathcal{F}_2 e \mathcal{F}_3 , ao tentar identificar uma razão para os seus elementos, obtemos

$$\begin{aligned} n_{k+1} - n_k &= \left\lfloor \frac{2\pi}{\theta} \cdot (2(k+1) + 1) \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2\pi}{\theta} \cdot (2k + 1) \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{2\pi}{\theta} \cdot (2k + 1) + \frac{4\pi}{\theta} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2\pi}{\theta} \cdot (2k + 1) \right\rfloor \end{aligned}$$

que, da identidade $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$ [8], prontifica a seguinte desigualdade: $\lfloor \frac{4\pi}{\theta} \rfloor \leq n_{k+1} - n_k \leq \lfloor \frac{4\pi}{\theta} \rfloor + 1$. Disto, podemos concluir somente

$$n_{k+1} - n_k = \left\lfloor \frac{4\pi}{\theta} \right\rfloor \quad \text{ou} \quad n_{k+1} - n_k = \left\lfloor \frac{4\pi}{\theta} \right\rfloor + 1,$$

o que significa que para alguns valores de k pode ser que a razão seja exatamente a parte inteira de $\frac{4\pi}{\theta}$, mas para outros pode ser que esta seja acrescida de uma unidade, como observado nas experiências para $N = 2$ e $N = 3$. De fato, usando a aproximação (44), temos $\left\lfloor \frac{4\pi}{\theta} \right\rfloor \approx \lfloor 2\pi \times 10^{N-1} \rfloor$ que aproxima bem e cada vez melhor as razões das progressões à medida que N cresce.

Cabe também um nota de esclarecimento sobre o recorde mundial do cálculo de casas decimais de π . O Ed Karrels, como descreve em sua página pessoal [2], avançou na obtenção dos algarismos de π começando de um número anteriormente já conhecido. Ele calculou os primeiros 10 quadrilhões começando a partir dos primeiros 4 quadrilhões. Estes, por sua vez, foram calculados em uma oportunidade anterior a partir dos primeiros 2 quadrilhões e assim sucessivamente. O cálculo recente dos primeiros 31 trilhões de algarismos de π feito pela japonesa Emma Iwao [11], pelo que se pode entender, foi iniciado do primeiro algarismo. Por essa razão, acredita-se que se reconheça o recorde como sendo o dela.

REFERÊNCIAS

- [1] <https://abc7news.com/archive/9467246/>
- [2] <http://www.karrels.org/pi/>
- [3] G. Galperin.
Playing pool with π (The number π from a billiard point of view)
REGUL CHAOTIC DYN, 2003, 8 (4), 375-394
- [4] <https://www.youtube.com/watch?v=HEfHFsfGXjs>
<https://www.youtube.com/watch?v=jsYwFizhncE>
- [5] H. Moysés Nussenzveig
Curso de Física Básica. 1 - Mecânica
Edgard Blucher Ltda., 2013, 5^o Edição.
- [6] Flávio Ulhoa Coelho e Mary Lilian Loureço.
Um Curso de Álgebra Linear
Editores da Universidade de São Paulo, 2013, 2^o Edição.

- [7] Elon Lages Lima.
Álgebra Linear. Coleção Metemática Universitária.
IMPA, 2006, 7^o Edição.
- [8] https://en.wikipedia.org/wiki/Floor_and_ceiling_functions
- [9] Murray R. Spiegel, Seymour Lipschutz e John Liu
Manual de Fórmulas e Tabelas Matemáticas. Coleção Schaum.
Bookman, 2012, 3^o Edição.
- [10] Elon Lages Lima.
Curso de Análise. Volume 1, Projeto Euclides.
IMPA, 2017, 14^o Edição.
- [11] https://pt.wikipedia.org/wiki/Cronologia_do_cálculo_de_pi
<https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2019/03/engenheira-do-google-bateu-recorde-de-calculo-do-pi.html>